

## 数チャレ 第163回 (2014年8月)

$(x + yi)(z - i) = 7 + 4i$  を満たす整数の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位であるとする。

解答

$$|x + yi||z - i| = |7 + 4i| \text{ より}$$

$$(x^2 + y^2)(z^2 + 1) = 7^2 + 4^2 = 65 = 5 \times 13$$

が必要である。約数を考えると

$$z^2 + 1 = 1, 5, 13, 65$$

に限られ、

$$z^2 = 0, 4, 12, 64$$

12 は平方数でないから、

$$z^2 = 0, 4, 64 \quad \therefore z = 0, \pm 2, \pm 8$$

(i)  $z = 0$  のとき

$$x + yi = \frac{7 + 4i}{-i} = i(7 + 4i) = -4 + 7i$$

(ii)  $z = 2$  のとき

$$x + yi = \frac{7 + 4i}{2 - i} = \frac{(7 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = 2 + 3i$$

(iii)  $z = -2$  のとき

$$x + yi = \frac{7 + 4i}{-2 - i} = \frac{(7 + 4i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{-18 - i}{5}$$

となって、 $x, y$  が整数であることに反する。

(iv)  $z = 8$  のとき

$$x + yi = \frac{7 + 4i}{8 - i} = \frac{(7 + 4i)(8 + i)}{(8 - i)(8 + i)} = \frac{52 + 39i}{65} = \frac{4 + 3i}{5}$$

となって、 $x, y$  が整数であることに反する。

(v)  $z = -8$  のとき

$$x + yi = \frac{7 + 4i}{-8 - i} = \frac{(7 + 4i)(-8 + i)}{(-8 - i)(-8 + i)} = \frac{-60 - 25i}{65} = \frac{-12 - 5i}{13}$$

となって、 $x, y$  が整数であることに反する。

以上より、求める整数の組は

$$(x, y, z) = (-4, 7, 0), (2, 3, 2) \quad (\text{答})$$