

## 数チャレ 第164回 (2014年9月)

- (1) 平方数を4で割った余りを求めよ。また、立方数を4で割った余りを求めよ。  
(2) 方程式

$$x! + 2 = y^z$$

を満たす2以上の整数の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。

### 解答

- (1)  $n$  を整数として、

$$(2n)^2 = 4n^2, \quad (2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$$

偶数の平方と奇数の平方で、すべての平方数は尽くされるから、  
平方数を4で割った余りは0または1 (答)

である。

任意の整数は、偶数、4で割ると1余る数、4で割ると3余る数のいずれかであり、その立方を調べると、 $n$  を整数として

$$(2n)^3 = 4 \cdot 2n^3$$

$$(4n+1)^3 = 64n^3 + 48n^2 + 12n + 1 \\ = 4(16n^3 + 12n^2 + 3n) + 1$$

$$(4n-1)^3 = 64n^3 - 48n^2 + 12n - 1 \\ = 4(16n^3 - 12n^2 + 3n - 1) + 3$$

となるから、

立方数を4で割った余りは0, 1, 3のいずれか (答)

である。

- (2)  $x \geq 2$  より

$x!$  は偶数

であるから、 $y$  は偶数であり、 $z \geq 2$  より

$y^z$  は4で割り切れる。

$$2\left(\frac{x!}{2} + 1\right) = y^z \text{ より}$$

$\frac{x!}{2}$  は奇数

であるから、 $x \geq 2$  のもとでは

$$x = 2 \text{ または } x = 3$$

に限られる。

- (i)  $x = 2$  のとき

$$y^z = 2! + 2 = 4$$

$z \geq 2$  より

$$y = 2, \quad z = 2$$

(ii)  $x = 3$  のとき

$$y^z = 3! + 2 = 8$$

$z \geq 2$  より

$$y = 2, z = 3$$

以上より, 求める整数の組は

$$(x, y, z) = (2, 2, 2), (3, 2, 3) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(注) (1)の結果は平方, 立方の場合だけでなく, 4乗以上についても

$$z = 2k \text{ (偶数) のとき } y^z = (y^2)^k \equiv 0, 1 \pmod{4}$$

$$z = 2k + 1 \text{ (奇数) のとき } y^z = (y^2)^{k-1} y^3 \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$$

が一般に成り立つから, 特に

$$y^z \not\equiv 2 \pmod{4}$$

$x \geq 4$  のとき  $x! + 2 \equiv 2 \pmod{4}$  であるから

$$x \leq 3 \text{ が必要}$$

であることがわかる。