

数チャレ 第165回 (2014年10月)

- (1) $a + b \geq a^2 - ab + b^2$ を満たす正の整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
 (2) $a^3 + b^3 = p^4$ を満たす正の整数 a, b と素数 p の組 (a, b, p) をすべて求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a^2 - ab + b^2 - (a + b) &= a^2 - (b + 1)a + b^2 - b \\
 &= \left(a - \frac{b + 1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(b + 1)^2 + b^2 - b \\
 &= \left(a - \frac{b + 1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{2}b - \frac{1}{4} \\
 &= \left(a - \frac{b + 1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b - 1)^2 - 1 \qquad \dots\dots (*) \\
 &\geq -1
 \end{aligned}$$

であるから，整数 a, b が

$$a^2 - ab + b^2 \leq a + b$$

を満たすとすれば，

$$a^2 - ab + b^2 - (a + b) = -1 \text{ または } 0$$

(i) $a^2 - ab + b^2 - (a + b) = -1$ のとき

$$\left(a - \frac{b + 1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b - 1)^2 = 0$$

実数の性質より

$$a - \frac{b + 1}{2} = 0 \text{ かつ } b - 1 = 0 \qquad \therefore a = 1, b = 1$$

(ii) $a^2 - ab + b^2 - (a + b) = 0$ のとき

$$\left(a - \frac{b + 1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b - 1)^2 = 1$$

$$\therefore (2a - b - 1)^2 + 3(b - 1)^2 = 4$$

平方数であることと $b - 1 \geq 0$ を考えて，
 $(2a - b - 1, b - 1) = (\pm 2, 0), (\pm 1, 1)$
 $\therefore (a, b) = (2, 1), (0, 1), (2, 2), (1, 2)$
 $a > 0$ より $(a, b) = (0, 1)$ は不適である。

以上より， $a + b \geq a^2 - ab + b^2$ を満たす正の整数の組は
 $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ (答)

(別解) (*)の変形までは上の解答と同じで， $a + b \geq a^2 - ab + b^2$ を $(b$ を固定して)
 a についての2次不等式とみて，

$$\left(a - \frac{b + 1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b - 1)^2 - 1 \leq 0$$

が解をもつことより

$$\frac{3}{4}(b-1)^2 - 1 \leq 0$$

が必要であり,

$$3(b-1)^2 \leq 4$$

b は 1 以上の整数であるから

$$b = 1 \text{ または } b = 2$$

以上の議論は a と b を入れかえても成り立つから,

$$a = 1 \text{ または } a = 2$$

であり,

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$$

が必要である。

$$1 + 1 > 1^2 - 1 \times 1$$

$$1 + 2 = 1^2 - 1 \times 2 + 2^2$$

$$2 + 2 = 2^2 - 2 \times 2 + 2^2$$

より実際に与えられた不等式を満たすから, 求める正の整数の組は

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \quad (\text{答})$$

(2) $a + b < a^2 - ab + b^2$ のとき

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = p^4$$

を満たすのは, $a + b \geq 2$ および p が素数であることを考えると

$$a + b = p, \quad a^2 - ab + b^2 = p^3$$

のときに限られるが,

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = p^2 - 3ab < p^2 < p^3$$

となって矛盾する。

よって, (1) で求めた (a, b) であることが必要であり,

$$1^3 + 1^3 = 2,$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2,$$

$$2^3 + 2^3 = 16 = 2^4$$

のうち素数の 4 乗となるのは,

$$(a, b, p) = (2, 2, 2) \quad (\text{答})$$

の場合のみである。