

数チャレ 第166回 (2014年11月)

自然数 n を 10 進表示して各位の数の和を 10 進表示し、その各位の数の和を計算するという作業をくり返し、最終的に 1 桁になったときの数を $A(n)$ とする。例えば、

$$9875 \rightarrow 9 + 8 + 7 + 5 = 29 \rightarrow 2 + 9 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$$

より

$$A(9875) = 2$$

である。

- (1) $A(198)$, $A(199)$, $A(200)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) $A(n+9) - A(n)$ を求めよ。
- (3) 一般に、自然数 n に対して $A(n)$ がどのように求められるかを説明せよ。

解答

- (1) $198 \rightarrow 1 + 9 + 8 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9$ より

$$A(198) = 9 \quad (\text{答})$$

$$199 \rightarrow 1 + 9 + 9 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1 \text{ より}$$

$$A(199) = 1 \quad (\text{答})$$

$$200 \rightarrow 2 + 0 + 0 = 2 \text{ より}$$

$$A(200) = 2 \quad (\text{答})$$

- (2) $A(n+9) = A(n)$

であると予想され、この予想が正しいことを n についての数学的帰納法で示す。

n が 1 桁の自然数のときは、直接

$$A(1) = A(10) = 1, \quad A(2) = A(11) = 2, \quad \dots, \quad A(9) = A(18) = 9$$

であることが確かめられる。

$n - 1 (\geq 9)$ 以下に対して予想が正しいとき、

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(a_0, a_1, \dots, a_m は 0 以上 9 以下の整数)

に対して予想が正しいことを、繰り上がり方について場合を分けて示す。

- (i) $a_0 = 0$ のとき

$$n + 9 = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + 9$$

$a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 < a_m \cdot 10^m + \dots + a_1 \cdot 10 = n$ であるから、帰納法の仮定より

$$A(n+9) = A(a_m + \dots + a_1 + 9) = A(a_m + \dots + a_1) = A(n)$$

- (ii) $a_0 \geq 1$, $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 9$, $a_k \leq 8$ のとき

$$n + 9 = a_m \cdot 10^m + \dots + a_{k+1} \cdot 10^{k+1} + (a_k + 1) \cdot 10^k + (a_0 - 1)$$

$a_m + \dots + a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 = a_m + \dots + a_k + 9 + \dots + 9 + a_0 < n$ であるから、帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
A(n+9) &= A(a_m + \cdots + a_{k+1} + (a_k + 1) + (a_0 - 1)) \\
&= A(a_m + \cdots + a_{k+1} + a_k + a_0) \\
&= A(a_m + \cdots + a_{k+1} + a_k + 9 + \cdots + 9 + a_0) \\
&= A(n)
\end{aligned}$$

(iii) $a_0 \geq 1$, $a_1 = a_2 = \cdots + a_m = 9$ のとき

$$n + 9 = 10^{m+1} + (a_0 - 1)$$

$$A(n+9) = 1 + (a_0 - 1) = a_0 = a_0 + 9 = \cdots = a_0 + 9m = A(n)$$

以上より予想は正しく,

$$A(n+9) - A(n) = 0 \quad (\text{答})$$

(3) $n = 9q_n + r_n$ (q_n, r_n は整数, $1 \leq r_n \leq 9$)とおくと, (2)より

$$A(n) = r_n$$

よって,

$$\begin{cases} n \text{ が } 9 \text{ で割り切れないとき } A(n) \text{ は } n \text{ を } 9 \text{ で割った余り} \\ n \text{ が } 9 \text{ で割り切れるとき } A(n) = 9 \end{cases} \quad (\text{答})$$