

数チャレ 第167回 (2014年12月)

次の条件(*)を満たす正の整数 a, b を考える。

$$(*) \quad \frac{3a^2 + 2}{b^2}, \frac{5b^2 + 3}{a^2} \text{ がともに整数である}$$

- (1) $a < b$ のとき, 条件(*)を満たす正の整数の組 (a, b) を求めよ。
 (2) 条件(*)を満たす正の整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

解答

$$\frac{3a^2 + 2}{b^2} = c, \quad \frac{5b^2 + 3}{a^2} = d \text{ とおくと,}$$

$$3a^2 + 2 = b^2c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5b^2 + 3 = a^2d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

- (1) $(1 \leq) a < b$ のとき

$$3a^2 + 2 < 3b^2 + 2 < 3b^2 + b^2 = 4b^2$$

であるが, ①より

$$b^2c < 4b^2 \quad \therefore 1 \leq c < 4$$

$b^2c = 3a^2 + 2$ は 3 で割り切れないから

$$c = 1 \text{ または } c = 2$$

- (i) $c = 1$ のとき, ①より

$$3a^2 + 2 = b^2$$

②に代入して

$$5(3a^2 + 2) + 3 = a^2d \quad \therefore a^2(d - 15) = 13$$

13 は素数であるから

$$a^2 = 1, \quad d - 15 = 13$$

に限られるが, このとき ①より $b^2 = 5$ となって矛盾する。

- (ii) $c = 2$ のとき, ①より

$$3a^2 + 2 = 2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②に代入して

$$5(3a^2 + 2) + 6 = 2a^2d \quad \therefore a^2(2d - 15) = 16 = 2^4$$

$2d - 15$ は奇数であるから

$$a^2 = 16, \quad 2d - 15 = 1$$

③より $b (> a)$ も求めて

$$(a, b) = (4, 5)$$

- (i), (ii)より, 求める正の整数の組は

$$(a, b) = (4, 5) \quad (\text{答})$$

のみである。

(2) 1° $a = b$ のとき

$$c = 3 + \frac{2}{a^2}, \quad d = 5 + \frac{3}{a^2}$$

がともに整数となるから, a^2 は 2 と 3 の公約数であり,

$$a = b = 1$$

2° $a > b (\geq 1)$ のとき

$$5b^2 + 3 < 5a^2 + 3 < 5a^2 + a^2 = 6a^2$$

であるが, ②より

$$a^2 d < 6a^2 \quad \therefore 1 \leq d < 6$$

$a^2 d = 5b^2 + 3$ は 5 で割り切れないことも考え,

$$d = 1, 2, 3, 4$$

に限られる。

(i) $d = 1$ のとき, ②より

$$5b^2 + 3 = a^2$$

①に代入すると

$$3(5b^2 + 3) + 2 = b^2 c \quad \therefore b^2(c - 15) = 11$$

11 は素数であるから

$$b^2 = 1, \quad c - 15 = 11$$

に限られるが, このとき ②より $a^2 = 8$ となって矛盾する。

(ii) $d = 2$ のとき, ②より

$$5b^2 + 3 = 2a^2$$

①に代入すると

$$3(5b^2 + 3) + 4 = 2b^2 c \quad \therefore b^2(2c - 15) = 13$$

13 は素数であるから

$$b^2 = 1, \quad 2c - 15 = 13$$

②より $a (> b)$ も求めて

$$(a, b) = (2, 1)$$

(iii) $d = 3$ のとき

②より b は 3 で割り切れるが, ①を満たさない。

(iv) $d = 4$ のとき, ②より

$$5b^2 + 3 = 4a^2$$

①に代入すると

$$3(5b^2 + 3) + 8 = 4b^2 c \quad \therefore b^2(4c - 15) = 17$$

17 は素数であるから

$$b^2 = 1, \quad 4c - 15 = 17$$

に限られるが, このとき ②より $a^2 = 2$ となって矛盾する。

以上より, 条件(P)を満たす正の整数の組は

$$(a, b) = (4, 5), (1, 1), (2, 1) \quad (\text{答})$$