

数チャレ 第168回 (2015年1月)

任意の整数 n に対して,
 $k(n^{13} - n)$ が 2015 で割り切れる
ような最小の自然数 k を求めよ。

解答

$$2015 = 5 \times 13 \times 31$$

と素因数分解されるから, 任意の整数 n に対して $k(n^{13} - n)$ が

5, 13, 31 のいずれでも割り切れる

条件を考えればよい。

(i) 任意の整数 n に対して $n^{13} - n$ が 5 で割り切れることを示す。

$$n^{13} - n = n(n^{12} - 1) = n(n^4 - 1)(n^8 + n^4 + 1)$$

n を 5 で割った余りは 0, 1, 2, 3, 4 のいずれかであり,

$$n \equiv 1, 4 \pmod{5} \implies n^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n \equiv 2, 3 \pmod{5} \implies n^2 \equiv -1 \pmod{5}$$

より $n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^4 - 1)$ はつねに 5 で割り切れるから, $n^{13} - n$ はつねに 5 で割り切れる。

(ii) 任意の整数 n に対して $n^{13} - n$ が 13 で割り切れることを示す。

13 を法として

$$\begin{aligned} 2^4 &= 16 \equiv 3, & 3^4 &= 81 \equiv 3, & 4^4 &= (2^4)^2 \equiv 9, & 5^4 &= 25^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1, \\ 6^4 &= 2^4 \cdot 3^4 \equiv 9, & 7^4 &\equiv (-6)^4 \equiv 9, & 8^4 &\equiv (-5)^4 \equiv 1, & 9^4 &\equiv (-4)^4 \equiv 9, \\ 10^4 &\equiv (-3)^4 \equiv 3, & 11^4 &\equiv (-2)^4 \equiv 3, & 12^4 &\equiv (-1)^4 = 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$n^4 \text{ を } 13 \text{ で割った余りは } 0, 1, 3, 9 \text{ のいずれか}$$

である。

$$3^2 + 3 + 1 = 13, \quad 9^2 + 9 + 1 = 91 = 7 \times 13$$

であるから, $n^{13} - n = n(n^4 - 1)(n^8 + n^4 + 1)$ はつねに 13 で割り切れる。

(iii) $n^{13} - n$ が 31 で割り切れない自然数 n があることを示す。

$$2^{13} - 2 = 8192 - 2 = 8190 = 31 \times 264 + 6$$

は 31 で割り切れない。

(i), (ii), (iii) より, 任意の整数 n に対して $k(n^{13} - n)$ が 2015 で割り切れるための条件は

k が 31 で割り切れる

ことであり, 求める最小の自然数は

$$k = 31 \quad (\text{答})$$

である。