

数チャレ 第169回 (2015年2月)

2以上の自然数 n に対して方程式

$$(*) \quad x^n + 2y^n = 4z^n$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき, $(*)$ を満たす自然数 x, y, z の例を挙げよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき, $(*)$ を満たす自然数 x, y, z が存在しないことを示せ。

出典: 2005年 首都大学東京

解答

- (1) $n = 2$ のとき, $(*)$ は

$$x^2 + 2y^2 = 4z^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$z \geq 1$ を考え,

$$X = \frac{x}{z}, \quad Y = \frac{y}{z} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とおくと,

$$X^2 + 2Y^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

点 $(-2, 0)$ を通り, 傾き t (有理数) の直線の方程式は

$$Y = t(X + 2) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③かつ④より Y を消去して

$$X^2 + 2t^2(X + 2)^2 = 4$$

$$(X + 2)\{X - 2 + 2t^2(X + 2)\} = 0$$

$$\therefore (2t^2 + 1)(X + 2)\left(X + \frac{4t^2 - 2}{2t^2 + 1}\right) = 0$$

$X \neq -2$ とすると

$$X = \frac{2 - 4t^2}{1 + 2t^2}$$

④に代入して

$$Y = t \cdot \frac{2 - 4t^2 + 2(1 + 2t^2)}{1 + 2t^2} = \frac{4t}{1 + 2t^2}$$

③の有理数解は

$$(X, Y) = \left(\frac{2 - 4t^2}{1 + 2t^2}, \frac{4t}{1 + 2t^2}\right)$$

で得られる。

$$t = \frac{1}{2} \text{ とすると } (X, Y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

であるから, ②より, ①の自然数解例として

$$(x, y, z) = (2, 4, 3) \quad (\text{答})$$

が挙げられる。

(2) $n \geq 3$ のとき, (*) を満たす自然数 x, y, z が存在するとすれば,

$$\gcd(x, y, z) = 2^k d$$

なる非負整数 k と正の奇数 d が存在し,

$$x = 2^k x_1, \quad y = 2^k y_1, \quad z = 2^k z_1$$

とおくと,

$$x_1, y_1, z_1 \text{ の少なくとも一つは (正の) 奇数}$$

である。(*) を満たすから,

$$(2^k x_1)^n + 2(2^k y_1)^n = 4(2^k z_1)^n$$

$$\therefore x_1^n + 2y_1^n = 4z_1^n$$

x_1^n は 2 で割り切れるから

$$x_1 = 2x_2 \quad (x_2 \text{ は自然数})$$

と表され,

$$2^{n-1} x_2^n + y_1^n = 2z_1^n$$

が成り立つ。 $n-1 \geq 2$ より y_1^n も 2 で割り切れるから

$$y_1 = 2y_2 \quad (y_2 \text{ は自然数})$$

と表され,

$$2^{n-2} x_2^n + 2^{n-1} y_2^n = z_1^n$$

である。 $n-2 \geq 1$ より, z_1 も 2 で割り切れることになり, x_1, y_1, z_1 の少なくとも一つが奇数であることに反する。

よって, $n \geq 3$ のとき, (*) を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

(証明おわり)