

## 数チャレ 第170回 (2015年3月)

以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  が正の偶数のとき,  $2^n - 1$  は 3 の倍数であることを示せ。
- (2)  $n$  を自然数とする。  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素であることを示せ。
- (3)  $p, q$  を異なる素数とする。  $2^{p-1} - 1 = pq^2$  を満たす  $p, q$  の組をすべて求めよ。

出典：2015年 九州大学 前期理系学部

### 解答

- (1)  $n$  は正の偶数であるから

$$n = 2m$$

となる自然数  $m$  が存在し,

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2m} - 1 \\ &= 4^m - 1 \\ &= (4 - 1) \times (4^{m-1} + 4^{m-2} + \cdots + 4 + 1) \\ &= 3 \times (4^{m-1} + 4^{m-2} + \cdots + 4 + 1) \end{aligned}$$

は 3 の倍数である。

(証明おわり)

- (2)  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,

$$(2^n + 1) - (2^n - 1) = 2 \text{ は } p \text{ で割り切れる}$$

から,

$$p = 2$$

に限られる。ところが,  $2^n \pm 1$  は奇数であるから,  $p = 2$  で割り切れず矛盾する。

よって,  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素である。

(証明おわり)

- (3)  $2^{p-1} = pq^2 + 1 \geq 2^3 + 1$  より  $p - 1 \geq 4$  であるから

$p$  は奇素数

であり,  $p - 1$  は正の偶数であるから, (1)より

$$2^{p-1} - 1 = pq^2 \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

である。  $p, q$  は素数であるから,

$$p = 3 \text{ または } q = 3$$

である。

ここで,  $p = 3$  とすると,

$$3q^2 = 2^2 - 1 = 3$$

より  $q = 1$  となって素数であることに反するから

$$q = 3$$

である。このとき

$$2^{p-1} - 1 = 9p \quad \dots\dots (*)$$

$p$  は 5 以上の素数 ( $q = 3$  と異なる奇素数) であるから

$$p - 1 = 2n \quad (n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

とおくことができ、(\*)は

$$(2^n + 1)(2^n - 1) = 9p$$

と書ける。素因数分解と  $2^n + 1 > 2^n - 1 > 1$  ( $n \geq 2$ ) を考えると

$$(2^n + 1)(2^n - 1) = (3p, 3), (p, 9), (9, p)$$

(2)より  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素であるから

$$(2^n + 1, 2^n - 1) = (p, 9), (9, p)$$

$9 + 1 = 2 \times 5$ ,  $9 - 1 = 2^3$  より

$$n = 3, \quad p = 2^3 - 1 = 7$$

となって、 $p$  が 3 以外の奇素数であることを満たす。

以上より、 $2^{p-1} - 1 = pq^2$  を満たす異なる素数  $p, q$  の組は、

$$(p, q) = (7, 3) \quad (\text{答})$$

ですべてである。

(注) 1 と  $9p$  も互いに素なので、考察漏れがないように。