

## 数チャレ 第171回 (2015年4月)

次の問いに答えよ。

- (1)  $5! + 4! + 3!$ の値を求めよ。
- (2)  $a \geq 4$ のとき,  $a! + 2$ は2の累乗になり得ないことを示せ。
- (3)  $a \geq 6$ のとき,  $\frac{a!}{2} + 4$ は2の累乗になり得ないことを示せ。
- (4)  $a \geq b \geq c$ を満たす正の整数  $a, b, c$ について,

$$S = a! + b! + c!$$

とする。  $S$ が2の累乗になる整数の組  $(a, b, c)$ をすべて求めよ。

出典：2015年 鳥取大学 地域学部

### 解答

(1)  $5! + 4! + 3! = 120 + 24 + 6 = 150$  (答)

(2)  $a \geq 4$ のとき,  $a!$ は4で割り切れるから

$$a! + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

$n \geq 2$ のとき,  $2^n$ は4で割り切れるから

$$a! + 2 \neq 2^n$$

また,  $a! + 2 > 2^1 > 2^0$ であるから,  $a! + 2$ は2の累乗にはなり得ない。

(証明おわり)

(3)  $a \geq 6$ のとき,  $\frac{a!}{2}$ は $\frac{6!}{2} = 360$ で割り切れ, 特に8で割り切れるから

$$\frac{a!}{2} + 4 \equiv 4 \pmod{8}$$

$n \geq 3$ のとき,  $2^n$ は8で割り切れるから

$$\frac{a!}{2} + 4 \neq 2^n$$

また,

$$\frac{a!}{2} + 4 > 2^2 > 2^1 > 2^0$$

であるから,  $\frac{a!}{2} + 4$ は2の累乗になり得ない。

(証明おわり)

(4)  $a \geq b \geq c$ のとき  $a!$ も  $b!$ も  $c!$ で割り切れるから,

$$S = a! + b! + c!$$

が2の累乗であるとすれば,  $c!$ は2の累乗の約数であり,

$$c = 1 \text{ または } c = 2$$

に限られる。

1°  $c = 1$  のとき

$S \geq 3$  であり,  $S$  が偶数であることが必要であるから,

$$b = 1, \quad a \geq 2$$

$S = a! + 2$  が 2 の累乗になるとすれば, (2) より

$$a \leq 3$$

が必要である。

$$2! + 2 = 4 = 2^2, \quad 3! + 2 = 8 = 2^3$$

はいずれも 2 の累乗となり,

$$(a, b, c) = (2, 1, 1), (3, 1, 1)$$

2°  $b = c = 2$  のとき

$$S = a! + 4$$

$a = 2$  のとき  $S = 6$ ,  $a = 3$  のとき  $S = 10$  であり, それぞれ 2 の累乗ではなく,

$a \geq 4$  のとき

$$S > 4, \quad S \equiv 4 \pmod{8}$$

であるから 2 の累乗ではない。

3°  $b = 3, c = 2$  のとき

$$S = a! + 3! + 2! = a! + 8 (> 1)$$

が 2 の累乗であれば,

$$\frac{S}{2} = \frac{a!}{2} + 4$$

も 2 の累乗であるから, (3) より

$$3 \leq a \leq 5$$

が必要である。

$$\frac{3!}{2} + 4 = 7, \quad \frac{4!}{2} + 4 = 16 = 2^4, \quad \frac{5!}{2} + 4 = 64 = 2^6$$

であるから,

$$(a, b, c) = (4, 3, 2), (5, 3, 2)$$

4°  $a \geq b \geq 4, c = 2$  のとき

$a!$  も  $b!$  も 4 で割り切れ,

$$S > 2, \quad S \equiv 2 \pmod{4}$$

であるから,  $S$  は 2 の累乗ではない。

以上より,  $S = a! + b! + c!$  が 2 の累乗になる  $a \geq b \geq c > 0$  を満たす整数の組は

$$(a, b, c) = (2, 1, 1), (3, 1, 1), (4, 3, 2), (5, 3, 2) \quad (\text{答})$$