

数チャレ 第172回 (2015年5月)

p を 2 以上の整数とし, $a = p + \sqrt{p^2 - 1}$, $b = p - \sqrt{p^2 - 1}$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $a^2 + b^2$ と $a^3 + b^3$ がともに偶数であることを示せ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。 $a^n + b^n$ が偶数であることを示せ。
- (3) 正の整数 n について, $[a^n]$ が奇数であることを示せ。ただし, 実数 x に対して, $[x]$ は $m \leq x < m + 1$ を満たす整数 m を表す。

出典 : 2015 年 岐阜大学 教育学部, 地域科学部, 応用生物科学部

解答

- (1) $a = p + \sqrt{p^2 - 1}$, $b = p - \sqrt{p^2 - 1}$ のとき

$$a + b = 2p,$$

$$ab = p^2 - (p^2 - 1) = 1$$

であるから,

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 2(2p^2 - 1),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= (2p)^3 - 3 \times 1 \times 2p$$

$$= 2p(4p^2 - 3)$$

はともに偶数である。

(証明おわり)

- (2) すべての自然数 n に対して,

$$a^n + b^n \text{ が偶数}$$

であることを数学的帰納法で示す。

$$a + b = 2p, \quad a^2 + b^2 = 2(2p^2 - 1)$$

はともに偶数であるから, $n = 1$ のときは成り立つ。

$a^k + b^k$, $a^{k+1} + b^{k+1}$ が偶数であるとすれば,

$$a^{k+2} + b^{k+2} = (a + b)(a^{k+1} + b^{k+1}) - ab(a^k + b^k)$$

$$= 2p(a^{k+1} + b^{k+1}) - (a^k + b^k)$$

も偶数である。

以上より, すべての自然数 n に対して $a^n + b^n$ が偶数であることが示された。

(おわり)

(3) $a > p > 1$, $ab = 1$ より

$$0 < b = \frac{1}{a} < 1$$

であるから,

$$0 < b^n < 1$$

$$\therefore a^n + b^n - 1 < a^n < a^n + b^n$$

(2)より, 特に $a^n + b^n$ は整数であるから,

$$[a^n] = a^n + b^n - 1$$

(2)より $a^n + b^n$ は偶数であるから,

$$[a^n] = a^n + b^n - 1 \text{ は奇数}$$

である。

(証明おわり)