

数チャレ 第173回 (2015年6月)

次の各問に答えよ。

- (1) 71 と 33 が互いに素であることを示せ。
- (2) $71x - 33y = 1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。
- (3) 71 で割ると 2 余り, 33 で割ると 7 余る自然数のうち, 4 桁で最小のものを求めよ。

出典 : 2015 年 名城大学 農学部

解答

- (1)
- $$71 = 33 \times 2 + 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$
- $$33 = 5 \times 6 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$
- $$5 = 3 \times 1 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$
- $$3 = 2 \times 1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

より,

$$\begin{aligned} \gcd(71, 33) &= \gcd(33, 5) \\ &= \gcd(5, 3) \\ &= \gcd(3, 2) \\ &= \gcd(2, 1) = 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (2) ③を④に代入して

$$3 = (5 - 3) + 1 \quad \therefore 5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$$

②を代入して

$$\begin{aligned} 5 \times (-1) + (33 - 5 \times 6) \times 2 &= 1 \\ \therefore 33 \times 2 + 5 \times (-13) &= 1 \end{aligned}$$

①を代入して

$$\begin{aligned} 33 \times 2 + (71 - 33 \times 2) \times (-13) &= 1 \\ \therefore 71 \times (-13) - 33 \times (-28) &= 1 \end{aligned}$$

よって,

$$(x, y) = (-13, -28) \quad (\text{答})$$

は $71x - 33y = 1$ を満たす整数 x, y の組の 1 つである。

- (3) 求める数 N は, 自然数 m, n を用いて

$$N = 71m + 2 = 33n + 7 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

と表され,

$$71m - 33n = 5 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

⑥ - ①より

$$71(m-1) - 33(n-2) = 0$$

$$\therefore 71(m-1) = 33(n-2)$$

(1)より 71 と 33 は互いに素であるから,

$$m-1 = 33k, \quad n-2 = 71k \quad (k \text{ は非負整数})$$

⑤に代入すると

$$N = 71(33k+1) + 2 = 2343k + 73$$

$k = 0$ から順に代入していき, 4桁で最小のものは

$$N = 2343 \times 1 + 73 = 2416 \quad (\text{答})$$