

数チャレ 第174回 (2015年7月)

自然数 n に対して, $v(n)$ を

$$n! = 5^{v(n)} \cdot d \quad (d \text{ は } 5 \text{ と互いに素な整数})$$

と表すときの非負整数と定める。すなわち, $n!$ は 5 でちょうど $v(n)$ 回割り切れる。

(1) $v(2015)$ を求めよ。

(2) $n = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + \cdots + a_m \cdot 5^m$ ($a_k = 0, 1, 2, 3, 4; a_m \neq 0$) と表すとき, $v(n)$ を n, a_0, a_1, \dots, a_m を用いて表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n}$ を求めよ。

解答

(1) $5^3 < 2015 < 5^4$ を考えて,

$$\begin{aligned} v(2015) &= \left(\left[\frac{2015}{5} \right] - \left[\frac{2015}{5^2} \right] \right) + 2 \left(\left[\frac{2015}{5^2} \right] - \left[\frac{2015}{5^3} \right] \right) \\ &\quad + 3 \left(\left[\frac{2015}{5^3} \right] - \left[\frac{2015}{5^4} \right] \right) + 4 \left[\frac{2015}{5^4} \right] \\ &= \left[\frac{2015}{5} \right] + \left[\frac{2015}{5^2} \right] + \left[\frac{2015}{5^3} \right] + \left[\frac{2015}{5^4} \right] \\ &= 403 + 80 + 16 + 3 \\ &= 502 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $n = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + \cdots + a_m \cdot 5^m$ ($a_k = 0, 1, 2, 3, 4; a_m \neq 0$) と一意に表されて,

$$\begin{aligned} v(n) &= \left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{5^2} \right] + \cdots + \left[\frac{n}{5^m} \right] \\ &= (a_1 + a_2 \cdot 5 + a_3 \cdot 5^2 + \cdots + a_m \cdot 5^{m-1}) + (a_2 + a_3 \cdot 5 + \cdots + a_m \cdot 5^{m-2}) \\ &\quad + \cdots + (a_{m-1} + a_m \cdot 5) + a_m \\ &= a_1 + a_2(5+1) + a_3(5^2+5+1) + \cdots + a_m(5^{m-1} + 5^{m-2} + \cdots + 5 + 1) \\ &= a_1 \cdot \frac{5-1}{5-1} + a_2 \cdot \frac{5^2-1}{5-1} + a_3 \cdot \frac{5^3-1}{5-1} + \cdots + a_m \cdot \frac{5^m-1}{5-1} \\ &= \frac{a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + \cdots + a_m \cdot 5^m - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)}{5-1} \\ &= \frac{a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + \cdots + a_m \cdot 5^m - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)}{4} \\ &= \frac{n - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (2)より

$$\frac{v(n)}{n} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{n} \right) \quad \dots\dots ①$$

ここで,

$$0 \leq \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{n} \leq \frac{4(m+1)}{n} \leq \frac{4(m+1)}{5^m} \quad \dots\dots ②$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{4(m+1)}{5^m} &= \frac{4(m+1)}{(1+4)^m} \leq \frac{4(m+1)}{{}_m C_0 + {}_m C_1 \cdot 4 + {}_m C_2 \cdot 4^2} \\ &\leq \frac{4(m+1)}{{}_m C_2 \cdot 4^2} = \frac{m+1}{4m(m-1)} \end{aligned}$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{4m(m-1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{4(m-1)} \left(1 + \frac{1}{m} \right) = 0$ であるから, ハサミウチの原

理より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4(m+1)}{5^m} = 0$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ であるから, ②より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{n} = 0$$

①より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n} = \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$