

数チャレ 第175回 (2015年8月)

$$f(x) = \frac{2x+17}{x^2+2} \text{ とする。}$$

- (1) n が整数であるとき, $f(n)$ の最大値と最小値を求めよ。
 (2) $f(q)$ が整数となるような有理数 q を求めよ。

解答

(1) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+17) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2(-x^2-17x+2)}{(x^2+2)^2}$$

ここで,

$$g(x) = -x^2 - 17x + 2 = -(x-\alpha)(x-\beta) \quad (\alpha < \beta)$$

とおくと, $f'(x)$ の符号変化は $g(x)$ と同じであり, $f(x)$ の増減は

x	$(-\infty)$	α	β	(∞)			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	(0)	\	極小	/	極大	\	(0)

$$g(-18) = -16 < 0, \quad g(-17) = 2 > 0, \quad g(0) = 2 > 0, \quad g(1) = -16 < 0 \text{ より} \\ -18 < \alpha < -17, \quad 0 < \beta < 1$$

であるから, n が整数であるとき

$f(n)$ の最大値は $f(0)$ と $f(1)$ の大きい方

$f(n)$ の最小値は $f(-18)$ と $f(-17)$ の小さい方

である。

$$f(0) = \frac{17}{2} > f(1) = \frac{19}{3} \text{ より}$$

$$f(n) \text{ の最大値は } f(0) = \frac{17}{2} \quad (\text{答})$$

また,

$$f(-18) = \frac{-36+17}{324+2} = -\frac{19}{326}$$

$$f(-17) = \frac{-34+17}{289+2} = -\frac{17}{291}$$

$$f(-18) - f(-17) = \frac{-19 \times 291 + 326 \times 17}{326 \times 291} = \frac{-5529 + 5542}{326 \times 291} > 0$$

より

$$f(n) \text{ の最小値は } f(-17) = -\frac{17}{291} \quad (\text{答})$$

- (2) (1)より, $f(q)$ のとり得る整数値は
 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

に限られる。

$$f(q) = \frac{2q+17}{q^2+2} = 0 \text{ のとき}$$

$$q = -\frac{17}{2}$$

$f(q) = 1$ のとき

$$q^2 + 2 = 2q + 17$$

$$q^2 - 2q - 15 = 0$$

$$(q+3)(q-5) = 0 \quad \therefore q = -3, 5$$

$f(q) = 2$ のとき

$$2(q^2 + 2) - (2q + 17) = 2q^2 - 2q - 13 = 0$$

$\frac{1}{4}$ (判別式) = 27 は平方数でないから, 有理数 q は存在しない。

$f(q) = 3$ のとき

$$3(q^2 + 2) - (2q + 17) = 3q^2 - 2q - 11 = 0$$

$\frac{1}{4}$ (判別式) = 34 は平方数でないから, 有理数 q は存在しない。

$f(q) = 4$ のとき

$$4(q^2 + 2) - (2q + 17) = 4q^2 - 2q - 9 = 0$$

$\frac{1}{4}$ (判別式) = 37 は平方数でないから, 有理数 q は存在しない。

$f(q) = 5$ のとき

$$5(q^2 + 2) - (2q + 17) = 5q^2 - 2q - 7 = (q+1)(5q-7) = 0$$

$$\therefore q = -1, \frac{7}{5}$$

$f(q) = 6$ のとき

$$6(q^2 + 2) - (2q + 17) = 6q^2 - 2q - 5 = 0$$

$\frac{1}{4}$ (判別式) = 31 は平方数でないから, 有理数 q は存在しない。

$f(q) = 7$ のとき

$$7(q^2 + 2) - (2q + 17) = 7q^2 - 2q - 3 = 0$$

$\frac{1}{4}$ (判別式) = 22 は平方数でないから, 有理数 q は存在しない。

$f(q) = 8$ のとき

$$8(q^2 + 2) - (2q + 17) = 8q^2 - 2q - 1 = (4q+1)(2q-1) = 0$$

$$\therefore q = -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

以上より, $f(q)$ が整数となるような有理数 q は

$$q = -\frac{17}{2}, -3, -1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{5}, 5 \quad (\text{答})$$

(注)

1° (1)がなければ, 第92回のように

$$f(x) = \frac{2x + 17}{x^2 + 2} = k$$

とでも置いて、2次方程式の実数解条件から k の範囲を絞る方が楽である。

2° $f(n)$ が整数となるような整数 n を求めるのであれば、必要条件

$$f(n) \geq 1$$

より $-3 \leq n \leq 5$ に絞って $f(-3), f(-2), \dots, f(5)$ を計算してみる方が手間が少なくて済む。