

数チャレ 第176回 (2015年9月)

n が 5 で割り切れない正の奇数であるとき, $4^n + n^4$ は 5 で割り切れることを示せ。

解答

二項定理より

$$\begin{aligned} 4^n &= (5-1)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot 5^k \cdot (-1)^{n-k} \\ &= (-1)^n + 5 \sum_{k=1}^n {}_n C_k \cdot 5^{k-1} \cdot (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

n が奇数であることより $(-1)^n = -1$ であるから,

$4^n + 1$ は 5 で割り切れる。

n を 5 で割った余りは 1, 2, 3, 4 のいずれかであるから,

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24$$

は 5 で割り切れ,

$$n^4 - 1 = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + 5(2n^3 - 7n^2 + 10n - 5)$$

は 5 で割り切れる。

よって,

$$4^n + n^4 = (4^n + 1) + (n^4 - 1) \text{ は 5 で割り切れる。}$$

(証明おわり)

(注)

1° 4^{2k-1} を 5 で割った余りが 4 となることを, 数学的帰納法で示してもよい。

2° 剰余合同類を用いると, 次のように解答をまとめることもできる。

$$4^n = (5-1)^n \equiv (-1)^n \pmod{5}$$

n が奇数であることより $(-1)^n = -1$ であるから

$$4^n \equiv -1 \pmod{5}$$

n は 5 で割り切れないから, n を 5 で割った余りは 1, 2, 3, 4 のいずれかであり,

$$n \equiv 1 \pmod{5} \text{ のとき } n^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n \equiv 2 \pmod{5} \text{ のとき } n^4 \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n \equiv 3 \pmod{5} \text{ のとき } n^4 \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n \equiv 4 \pmod{5} \text{ のとき } n^4 \equiv 4^4 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{5}$$

より, n が 5 で割り切れないときはつねに

$$n^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

が成り立つ。よって,

$$4^n + n^4 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

(証明おわり)