

## 数チャレ 第177回 (2015年10月)

相異なる2以上の整数  $x, y, z$  が  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1$  を満たすとき,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  の最小値を求めよ。

解答

対称性より

$$2 \leq x < y < z$$

として最小値を求めればよいから,

$$\frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{3}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{x}$$

$$1 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ より}$$

$$1 < \frac{3}{x} \quad \therefore x < 3$$

$x$  は2以上の整数であるから

$$x = 2$$

に限られる。

$$\frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$$

より

$$\frac{2}{z} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{y}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{y} \quad \therefore y < 4$$

$y$  は  $x = 2 < y < 4$  を満たす整数であるから

$$y = 3$$

$$\frac{1}{z} > 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ より}$$

$$y = 3 < z < 6$$

整数  $z$  を  $\frac{1}{z}$  ができるだけ小さくなるようにとることにより

$$z = 5$$

以上より, 求める最小値は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30} \quad (\text{答})$$