

数チャレ 第178回 (2015年11月)

- (1) $4^n + n^4 - (2^n + n^2)^2$ を計算せよ。
 (2) n が 2 以上の整数であるとき, $4^n + n^4$ は素数でないことを証明せよ。

解答

(1) $4^n + n^4 - (2^n + n^2)^2 = -2 \cdot 2^n \cdot n^2 = -2^{n+1} n^2$ (答)

(2)(i) n が 2 以上の偶数であるとき

4^n と n^4 はともに 2 で割り切れ,

$$4^n + n^4 > 4^n > 2$$

であるから, $4^n + n^4$ は素数でない。

(ii) n が 3 以上の奇数であるとき

$$\frac{n+1}{2} \text{ は正の整数}$$

であるから,

$$\begin{aligned} 4^n + n^4 &= (2^n + n^2)^2 - 2^{n+1} n^2 \\ &= (2^n + n^2)^2 - \left(2^{\frac{n+1}{2}} n\right)^2 \\ &= \left(2^n + n^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} n\right) \left(2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n\right) \end{aligned}$$

において

$$2^n + n^2 \pm 2^{\frac{n+1}{2}} n \text{ はともに整数}$$

であり,

$$2^n + n^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} n > 2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n$$

であるから, $2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n \geq 2$ が示されれば, $4^n + n^4$ が素数でないことが示される。

$$\begin{aligned} 2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n &= 2^{n-1} + 2^{n-1} + n^2 - 2 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} n \\ &= 2^{n-1} + \left(2^{\frac{n-1}{2}} - n\right)^2 \\ &\geq 2^{n-1} > 2 \end{aligned}$$

であるから, $4^n + n^4$ は素数でない。

(証明おわり)

(注) $2^n + n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n = 2^{\frac{n+1}{2}} \left(2^{\frac{n-1}{2}} - n\right) + n^2 \geq 2$ を示すのに,

$$n \geq 7 \text{ のとき } 2^{\frac{n-1}{2}} > n$$

であることを数学的帰納法で証明してもよい。($n = 3, 5$ のときは直接示す。)