

## 数チャレ 第179回 (2015年12月)

正の整数  $m, n$  が  $2m^2 - m = 3n^2 - n$  を満たしているとする。

- (1)  $m - n$  と  $2m + 2n - 1$  が互いに素であることを示すことにより,  $m - n$  と  $2m + 2n - 1$  はともに平方数になることを示せ。
- (2)  $n$  が偶数になることを示せ。
- (3) 実際には  $2m^2 - m = 3n^2 - n$  を満たす正の整数  $m, n$  は存在しないことを証明せよ。

### 解答

$$(1) \quad 2m^2 - m = 3n^2 - n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を変形して,

$$\begin{aligned} 2(m^2 - n^2) - (m - n) &= n^2 \\ \therefore (m - n)(2m + 2n - 1) &= n^2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$m - n$  と  $2m + 2n - 1$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,

$$p \mid n^2$$

であるが,  $p$  は素数であるから

$$p \mid n$$

一方,  $p \mid m - n$  より

$$p \mid m$$

であるから,  $p \mid 2m + 2n - 1$  より素数  $p$  は1の約数となって矛盾する。よって,

$$m - n \text{ と } 2m + 2n - 1 \text{ は互いに素}$$

である。

$2m + 2n - 1 > 0$  にも注意すると, ②より

$$\begin{cases} m - n = a^2 & \dots\dots \textcircled{3} \\ 2m + 2n - 1 = b^2 & \dots\dots \textcircled{4} \\ n = ab & \dots\dots \textcircled{5} \end{cases}$$

を満たす正の整数  $a, b$  が存在し, 特に,  $m - n$  と  $2m + 2n - 1$  はともに平方数である。 (証明おわり)

- (2) ④より  $b$  は奇数であるから

$$b = 2k - 1 \quad (k \text{ は正の整数})$$

と表され, 隣り合う整数の一方は必ず偶数となるから

$$b^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k - 1) + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$b^2 + 1 \equiv 2 \pmod{8}$  と ④より

$$m + n = \frac{b^2 + 1}{2} \text{ は奇数}$$

$m - n = (m + n) - 2n$  も奇数であるから, ③より

$$a^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であり, ③かつ④より

$$n = \frac{1}{2} \left( \frac{b^2 + 1}{2} - a^2 \right) = \frac{-2a^2 + b^2 + 1}{4} \quad \dots\dots ⑥$$

$-2a^2 + b^2 + 1 \equiv -2 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$  であるから,  $n$  は偶数である。

(証明おわり)

(3) (2)の考察より,  $a$  と  $b$  は奇数,  $n$  は偶数となるから, ⑤と矛盾する。

よって, ①を満たす正の整数  $m, n$  は存在しない。

(証明おわり)

(注) 矛盾の導き方には決まった型はないので, 他の方針も考えられる。例えば,

③かつ④より

$$m = \frac{1}{2} \left( a^2 + \frac{b^2 + 1}{2} \right) = \frac{2a^2 + b^2 + 1}{4}$$

$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$  より  $2a^2 + b^2 + 1 \equiv 4 \pmod{8}$  であるから,

$m$  は奇数

である。ところが, ①は

$$m = 2(m^2 - n^2) - n(n - 1)$$

と変形されるから,

$m$  は偶数

となって矛盾する。よって, ①を満たす正の整数  $m, n$  は存在しない。

(証明おわり)