

数チャレ 第180回 (2016年1月)

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2016$, $a \geq b \geq c \geq d > 0$ を満たす整数の組 (a, b, c, d) をすべて求めよ。

解答

$$13^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 = 2200 > 2016, \quad 7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 = 1372 < 2016 \text{ より}$$

$$a = 12, 11, 10, 9, 8$$

のいずれかであることが必要である。

(i) $a = 12$ のとき

$$b^3 + c^3 + d^3 = 288 \quad (b \geq c \geq d > 0)$$

$$7^3 + 1^3 + 1^3 = 345 > 288, \quad 4^3 + 4^3 + 4^3 = 192 < 288 \text{ より}$$

$$b = 6 \text{ または } 5$$

$b = 6$ のとき

$$c^3 + d^3 = 72 < 5^3$$

であるが,

$$72 - 4^3 = 2^3, \quad 72 - 3^3 = 45 > 3^3$$

であるから,

$$(c, d) = (4, 2)$$

$b = 5$ のとき

$$c^3 + d^3 = 163$$

であるが,

$$163 - 5^3 = 38 \neq d^3, \quad 163 - 4^3 = 99 > 4^3$$

であるから, 不適である。

(ii) $a = 11$ のとき

$$b^3 + c^3 + d^3 = 685 \quad (b \geq c \geq d > 0)$$

$$9^3 + 1^3 + 1^3 = 731 > 685, \quad 6^3 + 6^3 + 6^3 = 648 < 685 \text{ より}$$

$$b = 8 \text{ または } 7$$

$b = 8$ のとき

$$c^3 + d^3 = 173 < 6^3$$

であるが,

$$173 - 5^3 = 48 \neq d^3, \quad 173 - 4^3 = 109 > 4^3$$

であるから, 不適である。

$b = 7$ のとき

$$c^3 + d^3 = 342 < 7^3$$

であるが,

$$342 - 6^3 = 126 \neq d^3, \quad 342 - 5^3 = 217 > 5^3$$

であるから, 不適である。

(iii) $a = 10$ のとき

$$b^3 + c^3 + d^3 = 1016 \quad (10 \geq b \geq c \geq d > 0)$$

$$7^3 + 7^3 + 7^3 = 1029 > 1016, \quad 7^3 + 7^3 + 6^3 = 902 < 1016 \text{ より}$$

$$b = 10, 9, 8$$

$b = 10$ のとき

$$c^3 + d^3 = 16 < 3^3 \quad \therefore c = d = 2$$

$b = 9$ のとき

$$c^3 + d^3 = 287 < 7^3$$

であるが,

$$287 - 6^3 = 71 \neq d^3, \quad 287 - 5^3 = 162 > 5^3$$

であるから, 不適である。

$b = 8$ のとき

$$c^3 + d^3 = 504 < 8^3$$

であるが,

$$504 - 7^3 = 161 \neq d^3, \quad 504 - 6^3 = 288 > 6^3$$

であるから, 不適である。

(iv) $a = 9$ のとき

$$b^3 + c^3 + d^3 = 1287 \quad (9 \geq b \geq c \geq d > 0)$$

$$7^3 + 7^3 + 7^3 = 1029 < 1287 \text{ より}$$

$$b = 9 \text{ または } 8$$

$b = 9$ のとき

$$c^3 + d^3 = 558 < 9^3$$

であるが,

$$558 - 8^3 = 46 \neq d^3, \quad 558 - 7^3 = 215 \neq d^3, \quad 558 - 6^3 = 342 > 6^3$$

であるから, 不適である。

$b = 8$ のとき

$$c^3 + d^3 = 775 < 9^3$$

であるが,

$$775 - 8^3 = 263 \neq d^3, \quad 775 - 7^3 = 432 > 7^3$$

であるから, 不適である。

(v) $a = 8$ のとき

$$b^3 + c^3 + d^3 = 1504 \quad (8 \geq b \geq c \geq d > 0)$$

$$7^3 + 7^3 + 7^3 = 1029 < 1504 \text{ より}$$

$$b = 8, \quad c^3 + d^3 = 992$$

に限られ,

$$992 - 8^3 = 480 \neq d^3, \quad 992 - 7^3 = 649 > 7^3$$

であるから, 不適である。

以上より , $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2016$, $a \geq b \geq c \geq d > 0$ を満たす整数の組は
 $(a, b, c, d) = (12, 6, 4, 2), (10, 10, 2, 2)$ (答)
ですべてである。