

数チャレ 第181回 (2016年2月)

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件(A): x, y, z は正の整数で, $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leq y \leq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

- (1) 条件(A)を満たす組 (x, y, z) で, $y \leq 3$ となるものをすべて求めよ。
- (2) 組 (a, b, c) が条件(A)を満たすとす。このとき, 組 (b, c, z) が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。
- (3) 条件(A)を満たす組 (x, y, z) は, 無数に存在することを示せ。

出典 : 2006年 東京大学

解答

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x \leq y \leq z \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(1) ①を z について整理すると

$$z^2 - xyz + (x^2 + y^2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

必要条件として, 実数 z が存在しなければならないから

$$(\text{判別式}) = (xy)^2 - 4(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\therefore (x^2 - 4)(y^2 - 4) \geq 16$$

この不等式は, $1 \leq x \leq y \leq 3$ を満たす整数においては

$$x = y = 3$$

のときだけ成立する。このとき, ③より z を求めると

$$z^2 - 9z + 18 = 0$$

$$(z - 3)(z - 6) = 0 \quad \therefore z = 3, 6$$

$y \leq 3$ で条件を満たす正の整数の組は

$$(x, y, z) = (3, 3, 3), (3, 3, 6) \quad (\text{答})$$

(2) 組 (a, b, c) が条件(A)を満たすとすれば,

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$0 < a \leq b \leq c \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。

$$\textcircled{4} \iff b^2 + c^2 = a(bc - a)$$

であることに注目して

$$z = bc - a \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

とおくと, (1)より $b \geq 3$ であり, ⑤とあわせて

$$z - c = bc - a - c \geq 3c - a - c = c + (c - a) > 0 \dots\dots ⑦$$

また, ④より

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 + z^2 - bcz &= b^2 + c^2 + (bc - a)^2 - bc(bc - a) \\ &= b^2 + c^2 + a^2 - abc \\ &= 0 \dots\dots ⑧ \end{aligned}$$

⑤, ⑥, ⑦, ⑧より, 条件(A)を満たす組 (a, b, c) に対して, 組 $(b, c, bc - a)$ は条件(A)を満たす。 (証明おわり)

(3) $a_1 = b_1 = c_1 = 3$ とし, 条件(A)を満たす組 (a_n, b_n, c_n) に対して

$$a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = c_n, \quad c_{n+1} = b_n c_n - a_n$$

により組 $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ を定めると, この組も条件(A)を満たし, ⑦より

$$c_n < c_{n+1}$$

であるから, 条件(A)を満たす組 (x, y, z) は無数にある。 (証明おわり)