

数チャレ 第182回 (2016年3月)

数列 $\{a_n\}$ はすべての項が整数であり、次の性質を満たしている。

「正の整数 n の正の約数が k 個あるとき、これらを d_1, d_2, \dots, d_k とすると、

$$a_{d_1} + a_{d_2} + \dots + a_{d_k} = n$$

が成り立つ。」

(1) $a_5 = \boxed{\text{ツ}}$, $a_6 = \boxed{\text{テ}}$, $a_{49} = \boxed{\text{ト}}$ である。

(2) $a_{5^{100}} = \boxed{\text{ナ}} \cdot 5^{99}$ である。

(3) p, q を $p < q$ を満たす2つの素数とする。 $a_{pq} = pq - 11$ が成立するならば、
 $p = \boxed{\text{二}}$, $q = \boxed{\text{又}}$ である。

出典：2016年 早稲田大学 スポーツ科学部

解答

(1) 数列 $\{a_n\}$ の定め方より

$$a_1 = 1, \quad a_1 + a_5 = 5$$

であるから、

$$a_5 = 5 - 1 = \boxed{4} \text{ (ツ)}$$

また、

$$a_1 + a_2 = 2, \quad a_1 + a_3 = 3, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_6 = 6$$

より

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_6 = \boxed{2} \text{ (テ)}$$

さらに、

$$a_1 + a_7 = 7, \quad a_1 + a_7 + a_{49} = 49$$

より

$$a_{49} = 49 - 7 = \boxed{42} \text{ (ト)}$$

(2)

$$a_1 + a_5 + a_{5^2} + \dots + a_{5^{99}} + a_{5^{100}} = 5^{99} + a_{5^{100}} = 5^{100}$$

より

$$a_{5^{100}} = 5^{100} - 5^{99} = \boxed{4} \cdot 5^{99} \text{ (ナ)}$$

(3) p, q は異なる素数であるから

$$a_1 + a_p = p, \quad a_1 + a_q = q, \quad a_1 + a_p + a_q + a_{pq} = pq$$

であり、

$$\begin{aligned}a_{pq} &= pq - a_1 - a_p - a_q \\ &= pq - 1 - (p - 1) - (q - 1) \\ &= pq - p - q + 1\end{aligned}$$

$a_{pq} = pq - 11$ が成立するならば ,

$$-p - q + 1 = -11 \quad \therefore p + q = 12$$

$2 \leq p < q$ より

$$(p, q) = (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7)$$

p, q はともに素数であるから

$$p = \boxed{5}, \quad q = \boxed{7}$$

(ニ) (ヌ)