

# 数チャレ 第183回 (2016年4月)

次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  を正の実数とし,  $k$  を 1 以上の実数とする.  $x$  についての 2 次方程式

$$x^2 - kax + a - k = 0$$

は, 不等式

$$-\frac{1}{a} < s \leq 1$$

をみたすような実数解  $s$  をもつことを示せ.

- (2)  $a$  を 3 以上の整数とする.  $n^2 + a$  が  $an + 1$  で割り切れるような 2 以上のすべての整数  $n$  を  $a$  を用いて表せ.

出典 : 2016 年 大阪大学

解答

- (1)  $f(x) = x^2 - kax + a - k$  とおくと,

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + k + a - k = a + \frac{1}{a^2} > 0$$

$$f(1) = 1 - ka + a - k = (1 + a)(1 - k) \leq 0$$

であるから, 2 次方程式  $f(x) = 0$  は

$$-\frac{1}{a} < s \leq 1$$

をみたすような実数解  $s$  をもつ.

(証明おわり)

- (2)  $n^2 + a$  が  $an + 1$  で割り切れるとき,

$$n^2 + a = k(an + 1) \quad \dots\dots (*)$$

をみたす 1 以上の整数  $k$  が存在する.  $f(n) = 0$  であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(n) \\ &= x^2 - n^2 - ka(x - n) \\ &= (x - n)(x + n - ka) \end{aligned}$$

$n \geq 2$  であるから, (1)より

$$-\frac{1}{a} < ka - n \leq 1$$

$a \geq 3$  より, 整数  $ka - n$  は

$$ka - n = 0 \text{ または } 1 \quad \therefore n = ka \text{ または } ka - 1$$

$n = ka$  のとき, (\*)より

$$(ka)^2 + a = k(a \cdot ka + 1) \quad \therefore k = a, \quad n = a^2$$

$n = ka - 1$  のとき, (\*)より

$$(ka - 1)^2 + a = k \{a(ka - 1) + 1\}$$

$$- 2ka + 1 + a = -ka + k$$

$$ka + k - a - 1 = 0$$

$$(a + 1)(k - 1) = 0$$

$a \geq 3$  より

$$k = 1 \quad \therefore n = a - 1$$

以上より

$$n = a^2 \text{ または } n = a - 1 \quad (\text{答})$$