

## 数チャレ 第184回 (2016年5月)

$x, y$  を整数とするとき, 次の問いに答えよ.

問1  $x^2 + y^2$  が3で割り切れるとき,  $x$  と  $y$  はともに3の倍数であることを示せ.

問2  $x^2 + y^2$  が27で割り切れるとき,  $x$  と  $y$  はともに9の倍数であることを示せ.

問3  $n$  を正の整数とする.  $x^2 + y^2$  が  $3^{2n-1}$  で割り切れるとき,  $x$  と  $y$  はともに  $3^n$  の倍数であることを示せ.

出典: 2016年 大阪市立大学

### 解答

問1 任意の整数は

$$3n, 3n \pm 1 \quad (n \text{ は整数})$$

のいずれかの形に表され,

$$(3n)^2 = 3 \cdot 3n^2, \quad (3n \pm 1)^2 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$$

であるから,  $x^2, y^2$  および  $x^2 + y^2$  を3で割った余りは

$x^2$	0	0	1	1
$y^2$	0	1	0	1
$x^2 + y^2$	0	1	1	2

のいずれかとなる。よって,  $x^2 + y^2$  が3で割り切れる(余りが0になる)とき,  $x$  と  $y$  はともに3の倍数(余りは0)である。 (証明おわり)

問2  $x^2 + y^2$  が27で割り切れるとき, 特に3で割り切れるから, 問1より

$$x = 3a, \quad y = 3b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる整数  $a, b$  が存在する。

$$x^2 + y^2 = 9(a^2 + b^2)$$

は27で割り切れるから,

$$a^2 + b^2 \text{ は } 3 \text{ で割り切れる}$$

ことになり, 問1より

$$a = 3c, \quad b = 3d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる整数  $c, d$  が存在するから, ①, ②より

$$x = 9c, \quad y = 9d$$

と表され,  $x$  と  $y$  はともに9の倍数である。 (証明おわり)

問 3 命題  $P_n$  :

「 $x^2 + y^2$  が  $3^{2n-1}$  で割り切れるとき,  $x$  と  $y$  はともに  $3^n$  の倍数である」  
が成り立つことを  $n$  についての数学的帰納法で示す。

問 1 より,  $n = 1$  のときは成り立つ。

$x^2 + y^2$  が  $3^{2(k+1)-1} = 3^{2k+1}$  で割り切れるとすれば, 3 で割り切れるから, 問 1 より

$$x = 3a, \quad y = 3b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

となる整数  $a, b$  が存在する。

$$x^2 + y^2 = 9(a^2 + b^2)$$

は  $3^{2k+1}$  で割り切れるから,

$$a^2 + b^2 \text{ は } 3^{2k-1} \text{ で割り切れる。}$$

$P_k$  が成り立つとすれば,

$$a = 3^k c, \quad b = 3^k d \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

となる整数  $c, d$  が存在するから,  $\textcircled{3}, \textcircled{4}$  より

$$x = 3^{k+1} c, \quad y = 3^{k+1} d$$

となって,  $x$  と  $y$  はともに  $3^{k+1}$  の倍数であり,  $P_{k+1}$  も成り立つ。 (証明おわり)