

## 数チャレ 第186回 (2016年7月)

$a$  は3以上の整数であるとする。

$a$  進数表示で  $n^n$  が  $n$  桁となるような2以上の整数  $n$  は必ず存在することを証明せよ。

解答

$n^n$  が  $a$  進数表示で  $n$  桁であるとすれば、

$$a^{n-1} \leq n^n < a^n$$

と表されるから、自然対数をとると

$$(n-1) \log a \leq n \log n < n \log a$$

右の不等式は  $n \leq a-1$  であれば成り立つから、

$$\frac{\log a}{n} \leq \frac{\log n}{n-1} \quad \text{かつ} \quad 2 \leq n \leq a-1$$

を満たす整数  $n$  が存在することを証明すればよい。 $n = a-1$  のときを考えて、

$$\frac{\log a}{a-1} \leq \frac{\log(a-1)}{a-2} \quad \text{であることを証明すれば十分}$$

である。

$$f(x) = \frac{\log x}{x-1} \quad (x > 1)$$

とおくと、

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - (\log x) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \log x}{x(x-1)^2}$$

ここで、 $g(x) = x-1-x \log x$  ( $x \geq 1$ )とおくと、 $x > 1$ において

$$g'(x) = 1 - 1 \cdot \log x - x \cdot \frac{1}{x} = -\log x < 0$$

であるから、 $g(x)$  は  $x \geq 1$  において狭義単調減少である。よって、

$$x > 1 \text{ のとき } g(x) < g(1) = 0$$

が成り立つことより  $f'(x) < 0$  ( $x > 1$ ) が導かれ、

$$f(x) \text{ は } x > 1 \text{ において狭義単調減少}$$

であることがわかる。 $a-1 \geq 2 > 1$  より、特に

$$f(a-1) \geq f(a)$$

が成り立つ。

(証明おわり)