

数チャレ 第187回 (2016年8月)

自然数 n に対して $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ の整数部分を $f(n)$ と定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n}$ を求めよ。

解答

整数部分の最大性より

$$f(n) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < f(n) + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y = \frac{1}{x}$ は減少関数であるから,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

が成り立ち, 辺々加えると

$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx &< \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ \therefore \log(n+1) - \log 2 &< \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \log n \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①かつ②より

$$\begin{aligned} \log(n+1) - \log 2 &< f(n) + 1 \quad \text{かつ} \quad f(n) < \log n \\ \therefore \frac{\log(n+1)}{\log n} - \frac{1 + \log 2}{\log n} &< \frac{f(n)}{\log n} < 1 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\log(n+1)}{\log n} &= \frac{\log n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} = 1 + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log 2}{\log n} &= 0 \end{aligned}$$

であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} = 1 \quad (\text{答})$$