

数チャレ 第188回 (2016年9月)

自然数 x, y は

$$y^2 = x(x-1)(x-3)(x-4)$$

を満たすものとする。

- (1) $(z+1)^2 < z(z+3) < (z+2)^2$ を満たす整数 z の範囲を求めよ。
(2) 自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

解答

$$(1) \begin{cases} z(z+3) - (z+1)^2 = z-1 > 0 \\ (z+2)^2 - z(z+3) = z+4 > 0 \end{cases} \text{ より} \\ z > 1 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad y^2 = x(x-1)(x-3)(x-4) \\ = x(x-4) \cdot (x-1)(x-3) \\ = (x^2-4x)(x^2-4x+3)$$

(1)より, $x^2 - 4x > 1$ のとき

$$(x^2 - 4x + 1)^2 < y^2 < (x^2 - 4x + 2)^2$$

となって, $(x^2 - 4x + 1)^2$ と $(x^2 - 4x + 2)^2$ は隣り合う平方数であるから, 自然数 x, y は存在しない。よって,

$$y^2 = x(x-1)(x-3)(x-4) \quad \dots\dots (*)$$

を満たす自然数 x, y を求めるには

$$x^2 - 4x \leq 1$$

のときだけ考えればよい。

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \geq -4$$

も考え,

$$-4 \leq (x-2)^2 - 4 \leq 1 \quad \therefore 0 \leq (x-2)^2 \leq 5$$

x は自然数であるから

$$(x-2)^2 = 0, 1, 4$$

$$x-2 = -1, 0, 1, -2 \quad \therefore x = 1, 2, 3, 4$$

y も自然数であるから, (*)より

$$x \neq 1, 3, 4$$

であり, $x = 2$ のとき

$$y^2 = 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) = 2^2 \quad \therefore y = 2$$

以上より, (*)を満たす自然数の組は

$$(x, y) = (2, 2) \quad (\text{答})$$

ですべてである。