

## 数チャレ 第189回 (2016年10月)

- (1)  $2^m - 1$  が 11 で割り切れるような最小の自然数  $m$  を求めよ。
- (2) 11 で割り切れない任意の整数  $a$  と (1) で求めた自然数  $m$  に対して,  $a^m - 1$  は 11 で割り切れることを示せ。
- (3) 任意の自然数  $n$  に対して  $b^n + 2$  が 11 で割り切れないような整数  $b$  (についての条件) を求めよ。

### 解答

- (1) 2 の累乗を計算していくと

$$\begin{aligned}2^1 &= 2 \\2^2 &= 4 \\2^3 &= 8 \\2^4 &= 16 \equiv 5 \pmod{11} \\2^5 &\equiv 5 \times 2 \equiv 10 \pmod{11} \\2^6 &\equiv 10 \times 2 \equiv 9 \pmod{11} \\2^7 &\equiv 9 \times 2 \equiv 7 \pmod{11} \\2^8 &\equiv 7 \times 2 \equiv 3 \pmod{11} \\2^9 &\equiv 3 \times 2 \equiv 6 \pmod{11} \\2^{10} &\equiv 6 \times 2 \equiv 1 \pmod{11}\end{aligned}$$

となるから

$$m = 10 \quad (\text{答})$$

(注)  $2^{10} - 1$  が 11 で割り切れることだけでなく,  $m = 10$  の最小性 ( $1 \leq k \leq m-1$  において  $2^k - 1$  が 11 で割り切れないこと) も示さなくてはならない。結局, 余りをすべて求めてしまうのが最適な解法となる。求めた余りの情報は, このあと (2), (3) の解決につながることになる。

- (2) 11 で割り切れない任意の整数  $a$  に対して, (1) の考察より

$$a \equiv 2^k \pmod{11}$$

を満たす自然数  $k$  が存在する。

$$2^m \equiv 1 \pmod{11}$$

であるから,

$$a^m \equiv (2^k)^m \equiv (2^m)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{11}$$

であり,  $a^m - 1$  は 11 で割り切れる。

(証明おわり)

- (3)(i)  $b \equiv 0 \pmod{11}$  のとき

$$b^n + 2 \equiv 2 \pmod{11}$$

であり,  $b^n + 2$  は 11 で割り切れない。

(ii)  $b \not\equiv 0 \pmod{11}$  のとき

(1) の考察より

$$b \equiv 2^k \pmod{11}$$

を満たす自然数  $k$  が存在する。

$$-2 \equiv 9 \equiv 2^6 \pmod{11}$$

より

$$b^n + 2 \equiv 2^{kn} - 2^6 \pmod{11}$$

であるから、題意の条件は

$$\text{任意の自然数 } n \text{ に対して } kn \not\equiv 6 \pmod{10}$$

となることである。

$$1 \times 6 \equiv 2 \times 3 \equiv 4 \times 9 \equiv 7 \times 8 \equiv 6 \pmod{10}$$

より、

$$k \not\equiv 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \pmod{10}$$

$k \equiv 0 \pmod{10}$  のとき、任意の  $n$  に対して

$$kn \equiv 0 \not\equiv 6 \pmod{10}$$

$k \equiv 5 \pmod{10}$  のとき、任意の  $n$  に対して

$$kn \equiv 0, 5 \not\equiv 6 \pmod{10}$$

となって条件を満たし、 $k \equiv 0, 5 \pmod{10}$  のとき

$$b \equiv 2^k \equiv \pm 1 \pmod{11}$$

以上 (i), (ii) より、求める整数  $b$  (の条件) は

$$b \equiv 0, \pm 1 \pmod{11} \quad (\text{答})$$