

# 数チャレ 第190回 (2016年11月)

任意の自然数  $n$  に対して  $a_n, b_n$  は整数であり,

$$x_n + y_n i = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \cdots (a_n + b_n i)$$

とおく。ただし,  $i$  は虚数単位である。

- (1)  $k = 1, 2, \dots, n$  すべてに対して  $a_k \not\equiv b_k \pmod{2}$  ならば,  $x_n \not\equiv y_n \pmod{2}$  となることを示せ。
- (2)  $x_n \not\equiv y_n \pmod{2}$  ならば,  $k = 1, 2, \dots, n$  すべてに対して  $a_k \not\equiv b_k \pmod{2}$  となることを示せ。

## 解答

- (1)  $x_n \not\equiv y_n \pmod{2}$  であることを,  $n$  についての数学的帰納法で示す。

1°  $n = 1$  のとき

$$x_1 = a_1, \quad y_1 = b_1$$

であるから,  $x_1 \not\equiv y_1 \pmod{2}$  が成り立つ。

2°  $x_m \not\equiv y_m \pmod{2}$  であるとする。

$$\begin{aligned} x_{m+1} + y_{m+1} i &= (x_m + y_m i)(a_{m+1} + b_{m+1} i) \\ &= x_m a_{m+1} - y_m b_{m+1} + (x_m b_{m+1} + y_m a_{m+1}) i \end{aligned}$$

実部, 虚部をそれぞれ比べると

$$\begin{cases} x_{m+1} = x_m a_{m+1} - y_m b_{m+1} \\ y_{m+1} = x_m b_{m+1} + y_m a_{m+1} \end{cases}$$

$a_{m+1} \not\equiv b_{m+1} \pmod{2}$  より,  $a_{m+1} \pm b_{m+1}$  はともに奇数であるから

$$\begin{aligned} x_{m+1} - y_{m+1} &= x_m(a_{m+1} - b_{m+1}) - y_m(a_{m+1} + b_{m+1}) \\ &\equiv x_m \times 1 - y_m \times 1 \not\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

1°, 2° より, 任意の自然数  $n$  に対して

$$x_n \not\equiv y_n \pmod{2}$$

(証明おわり)

- (2)  $x_{n+1} \not\equiv y_{n+1} \pmod{2}$  ならば,

$$a_{n+1} \not\equiv b_{n+1}, \quad x_n \not\equiv y_n \pmod{2}$$

が成り立つことを示せば十分である。

$a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod{2}$  と仮定すると,

- (i)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  がともに偶数ならば,

$$x_{n+1} = x_n a_{n+1} - y_n b_{n+1}$$

$$y_{n+1} = x_n b_{n+1} - y_n a_{n+1}$$

はともに偶数となって,  $x_{n+1} \equiv y_{n+1} \pmod{2}$  に反する。

- (ii)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  がともに奇数ならば,

$$(x_{n+1} + y_{n+1} i)(a_{n+1} + b_{n+1} i) = (x_n + y_n i)(a_{n+1} + b_{n+1} i)^2$$

より

$$\begin{aligned} & x_{n+1}a_{n+1} - y_{n+1}b_{n+1} + (x_{n+1}b_{n+1} + y_{n+1}a_{n+1})i \\ &= (x_n + y_n i)(a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1}i - b_{n+1}^2) \end{aligned}$$

実部を比べると

$$\begin{aligned} & x_{n+1}a_{n+1} - y_{n+1}b_{n+1} = x_n(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2) - y_n \cdot 2a_{n+1}b_{n+1} \\ & a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 \text{ と } 2a_{n+1}b_{n+1} \text{ はともに偶数であるから右辺は偶数になるが,} \\ & x_{n+1}a_{n+1} - y_{n+1}b_{n+1} \equiv x_{n+1} \times 1 - y_{n+1} \times 1 \not\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

であるから矛盾する。

(i), (ii)より

$$a_{n+1} \not\equiv b_{n+1} \pmod{2}$$

$(a_{n+1}, b_{n+1})$  と  $(x_n, y_n)$  を入れ替えて同じ議論を行なうと

$$x_n \not\equiv y_n \pmod{2}$$

も示される。

(証明おわり)