

数チャレ 第191回 (2016年12月)

方程式

$$x^4 - 8x = y^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす整数 x, y を考える。

- (1) x が正の奇数ならば, x は平方数であることを示せ。
- (2) $y \neq 0$ のとき, $\textcircled{1}$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

解答

(1) $\textcircled{1}$ が

$$x(x^3 - 8) = y^2$$

と書けることに注目する。 x と $x^3 - 8$ が共通の素因数 p をもつとすれば,

$$x^3 - (x^3 - 8) = 8 = 2^3$$

より $p = 2$ に限られ, x が奇数であることに反する。よって,

$$x \text{ と } x^3 - 8 \text{ は互いに素}$$

であるから, $x > 0$ であることを考え, x と $x^3 - 8$ はともに平方数である。

(証明おわり)

(2)(i) x が正の奇数のとき, (1)より

$$\begin{cases} x = u^2 \\ x^3 - 8 = v^2 \end{cases}$$

を満たす互いに素な正の整数 u, v が存在し, x を消去すると

$$u^6 - 8 = v^2$$

$$u^6 - v^2 = (u^3 + v)(u^3 - v) = 8$$

$$u^3 + v - (u^3 - v) = 2v \text{ より}$$

$$u^3 + v \equiv u^3 - v \pmod{2}$$

であり,

$$0 < u^3 - v < u^3 + v$$

より

$$u^3 - v = 2, \quad u^3 + v = 4$$

に限られるが, このとき

$$u^3 = 3$$

となって, 整数 u は存在しない。

(ii) x が負の奇数のとき, (i)と同様に

$$\begin{cases} x = -u^2 \\ x^3 - 8 = -v^2 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

を満たす互いに素な正の整数 u, v が存在し, x を消去すると

$$-u^6 - 8 = -v^2$$

$$v^2 - u^6 = (v + u^3)(v - u^3) = 8$$

(i)と同様に $v + u^3$ と $v - u^3$ はともに偶数であり, $u > 0, v > 0$ より

$$v + u^3 = 4, \quad v - u^3 = 2$$

$$\therefore u = 1, \quad v = 3$$

②, ①より

$$(x, y) = (-1, \pm 3)$$

(iii) x が偶数のとき

$$x = 2n \quad (n \text{ は } 0 \text{ でない整数})$$

とおくと, ①より

$$16n^4 - 16n = y^2$$

y は 4 の倍数であり,

$$n(n^3 - 1) = \left(\frac{y}{4}\right)^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

n と $n^3 - 1$ は互いに素であるから

$$\begin{cases} n = a^2 \\ n^3 - 1 = b^2 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

または

$$\begin{cases} n = -c^2 \\ n^3 - 1 = -d^2 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

を満たす正の整数 a, b, c, d が存在する。

④のとき

$$a^6 - 1 = b^2$$

$$a^6 - b^2 = (a^3 + b)(a^3 - b) = 1$$

$$a^3 + b = a^3 - b = \pm 1$$

より $b = 0$ となって, ③より $y \neq 0$ に反する。

⑤のとき

$$-c^6 - 1 = -d^2$$

$$d^2 - c^6 = (d + c^3)(d - c^3) = 1$$

$$d + c^3 = d - c^3 = \pm 1$$

より $c = 0$ となって, ③より $y \neq 0$ に反する。

以上より, 求める整数の組は

$$(x, y) = (-1, \pm 3) \quad (\text{答})$$

ですべてである。