

## 数チャレ 第192回 (2017年1月)

${}_{2017}C_n$  が 29 で割り切れるような最小の自然数  $n$  を求めよ。

解答

$$2017 = 29 \times 69 + 16 \text{ より}$$

$$2017 \text{ 以下の最大の } 29 \text{ の倍数は } 29 \times 69 = 2001$$

$1 \leq n \leq 16$  のとき  $2018 - n \geq 2002$  であり, 29 は素数であるから,

$${}_{2017}P_n = 2017 \times 2016 \times \cdots \times (2018 - n)$$

は 29 で割り切れない。したがって,

$$1 \leq n \leq 16 \text{ のとき } {}_{2017}C_n = \frac{{}_{2017}P_n}{n!} \text{ は } 29 \text{ で割り切れない。}$$

$n = 17$  のとき

$$\begin{aligned} {}_{2017}C_{17} &= \frac{2017 \times 2016 \times \cdots \times 2002 \times 2001}{17!} \\ &= 29 \times \frac{2017 \times 2016 \times \cdots \times 2002 \times 69}{17!} \end{aligned}$$

は整数であるが, 29 は素数で  $17!$  とは互いに素であるから,

$$\frac{2017 \times 2016 \times \cdots \times 2002 \times 69}{17!} \text{ は整数}$$

であり,  ${}_{2017}C_{17}$  は 29 で割り切れる。

よって, 題意の条件を満たす最小の自然数  $n$  は

$$n = 17 \quad (\text{答})$$