

## 数チャレ 第193回 (2017年2月)

$a, b$  は 2 以上の整数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a^b - 1$  が素数ならば、 $a = 2$  であり、 $b$  は素数であることを証明せよ。  
(2)  $a^b + 1$  が素数ならば、 $b = 2^c$  ( $c$  は整数) と表せることを証明せよ。

出典：2007年 千葉大学 理学部

### 解答

$$(1) \quad a^b - 1 = (a - 1)(a^{b-1} + a^{b-2} + \cdots + a + 1)$$

$a \geq 2, b \geq 2$  より

$$0 < a - 1 < a < a^{b-1} + a^{b-2} + \cdots + a + 1$$

であるから、 $a^b - 1$  が素数ならば

$$a - 1 = 1, \quad a^{b-1} + a^{b-2} + \cdots + a + 1 \text{ は素数}$$

$$\therefore a = 2$$

$b (\geq 2)$  が合成数であるとすれば、

$$b = cd \quad (c, d \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

と表され、

$$\begin{aligned} a^b - 1 &= (a^c)^d - 1 \\ &= (a^c - 1)(a^{c(d-1)} + a^{c(d-2)} + \cdots + a^c + 1), \end{aligned}$$

$$a^c - 1 \geq 2^2 - 1 > 1, \quad a^{c(d-1)} + a^{c(d-2)} + \cdots + a^c + 1 > a + 1 > 1$$

となって、 $a^b - 1$  が素数であることに反するから、 $b$  は素数である。

(証明おわり)

(2)  $b$  が奇素数  $p$  を因数にもつとすれば、

$$b = pq \quad (q \text{ は自然数})$$

と表され、 $(-1)^p = -1$  より

$$\begin{aligned} a^b + 1 &= a^{pq} - (-1)^p \\ &= (a^q + 1)\{a^{q(p-1)} - a^{q(p-2)} + \cdots - a^q + 1\} \end{aligned}$$

ここで、

$$a^q + 1 > 1,$$

$$a^{q(p-1)} - a^{q(p-2)} + \cdots - a^q + 1 = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (a^{q(p-2k+1)} - a^{q(p-2k)}) + 1 > 1$$

であるから、 $a^b + 1$  は素数でない。

対偶をとると、 $a^b + 1$  が素数ならば、 $b$  は 2 以外の素因数をもたず、 $b \geq 2$  より

$$b = 2^c \quad (c \text{ は正の整数})$$

と表せる。

(証明おわり)