

数チャレ 第194回 (2017年3月)

定数 p は素数とし条件

$$a(ab - p^2) = c^2, \quad b \leq 2c$$

をみたす自然数の組 (a, b, c) を考える。 a が素数であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 自然数の組 (a, b, c) の個数を、 p を用いて表せ。
- (2) a, b, c の最大公約数が 1 となるような自然数の組 (a, b, c) の個数を、 p を用いて表せ。

出典：2017年 東京慈恵会医科大学

解答

$$a(ab - p^2) = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b \leq 2c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(1) ①より

$$a \mid c^2$$

a は素数であるから

$$a \mid c \quad \therefore a^2 \mid c^2$$

①に戻って

$$a^2 \mid ap^2 = a^2b - c^2 \quad \therefore a \mid p^2$$

a も p も素数であるから

$$a = p \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

よって、①は

$$p^2(b - p) = c^2$$

と書き直すことができ、 p は素数であることより

$$c = pd \quad (d \text{ は自然数}) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

と表されるから、

$$b - p = d^2 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④、⑤を②に代入して、

$$p + d^2 \leq 2pd \\ (d - p)^2 \leq p(p - 1)$$

$$(p - 1)^2 < p(p - 1) < p^2 \text{ より}$$

$$|d - p| \leq p - 1 \\ 1 - p \leq d - p \leq p - 1$$

$$\therefore 1 \leq d \leq 2p - 1 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

③, ④, ⑤, ⑥ より

自然数の組 (a, b, c) は $2p - 1$ 個 (答)

(2) (1)より

$$(a, b, c) = (a, p + d^2, pd) \quad (d = 1, 2, \dots, 2p - 1)$$

であり, $p = a$, $p \mid c$ であるから, a, b, c の最大公約数が 1 となるには, $b = p + d^2$ が p で割り切れない, すなわち

d が p で割り切れない

ことが必要である。このとき

$$\gcd(a, b) = 1$$

であるから,

$$\gcd(a, b, c) = 1$$

となって十分である。

したがって, a, b, c の最大公約数が 1 となるのは, d が ⑥のうち p を除いたときであり, このような自然数の組 (a, b, c) は

$$2(p - 1) \text{ 個 (答)}$$

である。