

## 数チャレ 第195回 (2017年4月)

次の問に答えよ。

(1) 次の条件(\*)を満たす3つの自然数  $(a, b, c)$  をすべて求めよ。

$$(*) \quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \text{ である。}$$

(2) 偶数  $2n$  ( $n \geq 1$ ) の3つの正の約数  $p, q, r$  で、 $p > q > r$  と  $p + q + r = n$  を満たす組  $(p, q, r)$  の個数を  $f(n)$  とする。ただし、条件を満たす組が存在しない場合は、 $f(n) = 0$  とする。 $n$  が自然数全体を動くときの  $f(n)$  の最大値  $M$  を求めよ。また、 $f(n) = M$  となる自然数の中で最小のものを求めよ。

出典：2017年 名古屋大学

解答

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1)  $0 < a < b < c$  より

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

①より

$$\frac{1}{a} + 0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a} \quad \therefore 2 < a < 6$$

$a$  は自然数であるから

$$a = 3, 4, 5$$

(i)  $a = 3$  のとき、①より

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$$

$$6(b+c) = bc$$

$$(b-6)(c-6) = 36$$

$-3 = a - 6 < b - 6 < c - 6$  を考え、積が36となる整数の組を求めて、

$$(b-6, c-6) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)$$

$$\therefore (b, c) = (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15)$$

(ii)  $a = 4$  のとき、①より

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$$

$$4(b+c) = bc$$

$$(b-4)(c-4) = 16$$

$0 = a - 4 < b - 4 < c - 4$  を考え、積が 16 となる整数の組を求めて、

$$(b - 4, c - 4) = (1, 16), (2, 8)$$

$$\therefore (b, c) = (5, 20), (6, 12)$$

(iii)  $a = 5$  のとき、①より

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{10}{3}(b + c) = bc$$

$$\left(b - \frac{10}{3}\right)\left(c - \frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9}$$

$$\therefore (3b - 10)(3c - 10) = 100$$

ところが、 $5 = 3a - 10 < 3b - 10 < 3c - 10$  であるから、これを満たす自然数  $a, b, c$  は存在しない。

以上より、(\*)を満たす自然数の組  $(a, b, c)$  は

$$(a, b, c) = (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18),$$

$$(3, 10, 15), (4, 5, 20), (4, 6, 12)$$

(答)

(2)  $p, q, r$  が  $2n$  の正の約数であることを考えて、

$$p = \frac{2n}{a}, q = \frac{2n}{b}, r = \frac{2n}{c} \quad \dots\dots ②$$

とおくと、 $p > q > r$ 、 $p + q + r = n$  より

$a, b, c$  は (\*) を満たす自然数

である。(1)より、 $f(n)$  は

$$\text{lcm}(3, 7, 42) = 42, \text{lcm}(3, 8, 24) = 24,$$

$$\text{lcm}(3, 9, 18) = 18, \text{lcm}(3, 10, 15) = 30,$$

$$\text{lcm}(4, 5, 20) = 20, \text{lcm}(4, 6, 12) = 12$$

のうち  $2n$  の約数となるものの個数

を表す。よって、 $f(n)$  は

$$\text{lcm}(42, 24, 18, 30, 20, 12)$$

$$= \text{lcm}(2 \times 3 \times 7, 2^3 \times 3, 2 \times 3^2, 2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 5)$$

$$= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \text{ が } 2n \text{ の約数}$$

であるとき、

$$\text{最大値 } M = 6 \quad (\text{答})$$

をとり、 $f(n) = M$  となる最小の自然数  $n$  は

$$n = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260 \quad (\text{答})$$

である。