

数チャレ 第196回 (2017年5月)

自然数 n に対して

$$A_n = \{x \mid x \text{ は, 各位の数が } 1 \text{ または } 2 \text{ である } n \text{ 桁の自然数}\}$$

とする. たとえば $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{11, 12, 21, 22\}$ となる. 以下の問いに答えよ.

- (1) A_3 の要素で, 2^3 で割り切れるものを求めよ.
- (2) A_4 の要素で, 2^4 で割り切れるものを求めよ.
- (3) すべての n に対して, A_n の要素で 2^n で割り切れるものが存在することを示せ.

出典: 2017年 奈良女子大学 理学部

解答

- (1) A_3 の要素で 2^2 で割り切れるものは

$$112, 212$$

であり,

$$112 = 8 \times 14, \quad 212 = 8 \times 26 + 4$$

であるから, 2^3 で割り切れるものは

$$112 \quad (\text{答})$$

- (2) $2^3 \mid 1000$ に注意すると, A_4 の要素で 2^3 で割り切れるものは

$$1112, 2112$$

であり,

$$\begin{aligned} 1112 &= 2^3 \times 5^3 + 2^3 \times 14 \\ &= 2^3 \times (125 + 14) \\ &= 2^4 \times 69 + 2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2112 &= 2^4 \times 5^3 + 2^3 \times 14 \\ &= 2^4 \times (5^3 + 7) \end{aligned}$$

であるから, 2^4 で割り切れるものは

$$2112 \quad (\text{答})$$

(3) A_n の要素で 2^n で割り切れるものが存在することを数学的帰納法で示す。

1° A_1 の要素 2 は 2^1 で割り切れる。

2° A_k の要素で 2^k で割り切れる k 桁の自然数

$$2^k \times a_k \quad (a_k \text{ は自然数})$$

が存在するとする。

a_k が奇数のときは, $a_k + 5^k$ は偶数であるから,

$$2^k \cdot a_k + 10^k = 2^k(a_k + 5^k) \text{ は } 2^{k+1} \text{ で割り切れる。}$$

a_k が偶数のときは, $a_k + 2 \cdot 5^k$ は偶数であるから,

$$2^k \cdot a_k + 2 \cdot 10^k = 2^k(a_k + 2 \cdot 5^k) \text{ は } 2^{k+1} \text{ で割り切れる。}$$

1°, 2° より, すべての自然数 n に対して, A_n の要素で 2^n で割り切れるものが存在する。 (証明おわり)