

## 数チャレ 第197回 (2017年6月)

次の問いに答えよ。

(1) 関数  $f(x)$  について、次の条件 (ア) と (イ) が同値であることを示せ。

(ア)  $n$  が整数ならば  $f(n)$  も整数である。

(イ)  $f(0)$  が整数であり、かつ、すべての整数  $n$  について  $f(n+1) - f(n)$  も整数である。

(2) 素数  $p$ 、整数  $q$  に対して、関数  $f(x)$  を次のように定める。

$$f(x) = \frac{1}{p}x^2 + \frac{1}{q}x$$

このとき、条件「 $n$  が 3 の倍数のとき、 $f(n)$  も 3 の倍数である」をみたすような  $p$ 、 $q$  の組  $(p, q)$  をすべて求めよ。

出典：2017年 富山大学 経済学部, 人間発達科学部

### 解答

(1) 正の整数  $n$  に対して

$$f(n) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \{f(k+1) - f(k)\}$$

負の整数  $n$  に対して

$$f(0) - f(n) = \sum_{k=n}^{-1} \{f(k+1) - f(k)\}$$

であるから、

「整数  $n$  に対して  $f(n)$  が整数」

であることと

「 $f(0)$  が整数、かつ、すべての整数  $n$  に対して  $f(n+1) - f(n)$  が整数」

であることは同値である。 (証明おわり)

(2)  $n = 3k$  ( $k$  は整数) のとき

$$f(3k) = \frac{1}{p}(3k)^2 + \frac{1}{q}(3k) = 3\left(\frac{3}{p}k^2 + \frac{1}{q}k\right)$$

であるから、

$$g(x) = \frac{3}{p}x^2 + \frac{1}{q}x$$

とおくとき、すべての整数  $n$  に対して

$$g(n) = \frac{3}{p}n^2 + \frac{1}{q}n \text{ が整数}$$

となるような素数  $p$  と整数  $q$  の組  $(p, q)$  を求めればよい。

(1)より,すべての整数  $n$  に対して

$$\begin{aligned}g(n+1) - g(n) &= \frac{3}{p} \{(n+1)^2 - n^2\} + \frac{1}{q}(n+1-n) \\ &= \frac{3}{p}(2n+1) + \frac{1}{q} \\ &= \frac{6}{p}n + \left(\frac{3}{p} + \frac{1}{q}\right)\end{aligned}$$

が整数となる  $p, q$  を求めればよい。

$p$  は素数,  $\frac{6}{p}$  は整数であるから,

$$p = 2 \text{ または } p = 3$$

(i)  $p = 2$  のとき

$$\frac{3}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \text{ は整数}$$

であるから,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + k = \frac{2k+1}{2} \quad (k \text{ は整数})$$

と表され,

$$q = \frac{2}{2k+1}$$

$q$  は整数であるから, 奇数  $2k+1$  で 2 の約数となるのは  $\pm 1$  のみであり,

$$q = \pm 2$$

(ii)  $p = 3$  のとき

$$\frac{3}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{q} \text{ は整数}$$

であるから,  $q$  は 1 の約数であり,

$$q = \pm 1$$

以上より, 求める整数の組は

$$(p, q) = (2, \pm 2), (3, \pm 1) \quad (\text{答})$$