

数チャレ 第198回 (2017年7月)

n 番目の素数を p_n で表す。例えば, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$ である。

(1) p_n に対して $2^t < p_n \leq 2^{t+1}$ を満たす非負整数 t を定めると,

$$2^t \leq (t+1)^{n-1}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}}$ を考えることにより, $p_n < 2^{\frac{9}{4}n^2}$ であることを示せ。

必要があれば, $2.71 < e < 2.72$ であることを用いてもよい。

解答

(1) p_n より小さい任意の自然数 m は

$$m = \prod_{k=1}^{n-1} p_k^{a_k} \quad (a_k \text{ は非負整数})$$

と表されるから, $p_k^{a_k} < p_n \leq 2^{t+1}$ より

$$a_k \leq t$$

であり, p_n より小さい自然数の個数について

$$p_n - 1 \leq (t+1)^{n-1}$$

が成り立つ。 $2^t \leq p_n - 1$ より

$$2^t \leq (t+1)^{n-1}$$

である。

(証明おわり)

(2) (1) で示した不等式の両辺自然対数をとると

$$t \log 2 \leq (n-1) \log(t+1)$$

$$\frac{t \log 2}{\log(t+1)} \leq n-1$$

$$\therefore \frac{3}{2} \left\{ \frac{t \log 2}{\log(t+1)} + 1 \right\} \leq \frac{3}{2} n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \left\{ \frac{t \log 2}{\log(t+1)} + 1 \right\} - \sqrt{t+1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{t \log 2}{\log(t+1)} + \frac{3}{2} - \sqrt{t+1} + \sqrt{t} - \sqrt{t} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{t \log 2}{\log(t+1)} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} \right) - \sqrt{t} \\ &> \frac{3}{2} \cdot \frac{t \log 2}{\log(t+1)} - \sqrt{t} = \frac{t}{\log(t+1)} \left\{ \frac{3}{2} \log 2 - \frac{\log(t+1)}{\sqrt{t}} \right\} \end{aligned}$$

であることを考えて,

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

とおくと,

$$\frac{3}{2} \left\{ \frac{t \log 2}{\log(t+1)} + 1 \right\} - \sqrt{t+1} = \frac{\sqrt{t}}{f(t)} \left(\frac{3}{2} \log 2 - f(t) \right) \dots\dots ②$$

である。 $f(x)$ を微分して

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot \sqrt{x} - \log(x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - (x+1)\log(x+1)}{2x\sqrt{x}(x+1)}$$

さらに,

$$g(x) = 2x - (x+1)\log(x+1) \quad (x \geq 0)$$

とおくと,

$$g'(x) = 2 - 1 \cdot \log(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1 - \log(x+1)$$

$x > 0$ において

$$g'(x) > 0 \iff \log(x+1) < 1 = \log e \iff x+1 < e$$

であるから, $g(x)$ の増減は

x	0	$e-1$	(∞)
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	↗ 極大	↘ $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ 2 - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \log(x+1) \right\} = -\infty$$

よって, $g(\alpha) = 0$, $e-1 < \alpha$ を満たす実数 α がただ 1 つ存在し, $f'(x)$ の分子である $g(x)$ の符号変化から, $f(x)$ の増減は

x	(0)	α
$f'(x)$	+	0
$f(x)$	↗ 極大	↘

x を自然数に限定して $f(x)$ の上限を調べるために α の評価から始めると,

$$g(3) = 2(3 - 2\log 4) = 2\log \frac{e^3}{16} > 2\log \frac{2.7^3}{16} = 2\log \frac{19.683}{16} > 0$$

$$e^8 < 2.72^8 = 7.3984^4 < 7.4^4 = 54.76^2 < 55^2 = 3025$$

$$g(4) = 8 - 5\log 5 = \log \frac{e^8}{5^5} = \log \frac{e^8}{3125} < \log \frac{3025}{3125} < 0$$

より

$$3 < \alpha < 4$$

であるから, $f(3)$, $f(4)$ を調べれば十分である。

$$f(3) = \frac{\log 4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \log 2 < \frac{3}{2} \log 2$$

$$f(4) = \frac{\log 5}{2} < \frac{\log 8}{2} = \frac{3}{2} \log 2$$

より, すべての自然数 t に対して

$$0 < f(t) < \frac{3}{2} \log 2$$

であるから, ②より

$$\sqrt{t+1} < \frac{3}{2} \left\{ \frac{t \log 2}{\log(t+1)} + 1 \right\} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①かつ③より, $n \geq 2$ (t が自然数) のとき

$$\sqrt{t+1} < \frac{3}{2} n \quad \therefore p_n \leq 2^{t+1} < 2^{\frac{9}{4}n^2}$$

$n = 1$ のときは,

$$p_1 = 2 < 2^{\frac{9}{4}}$$

であることが直接確かめられる。

(証明おわり)