

数チャレ 第199回 (2017年8月)

自然数 n の正の約数の個数を $d(n)$ で表すとき , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n d(k)$ を求めよ。

解答

$d(n)$ は , $ab = n$ を満たす正の整数の組 (a, b) の個数と考えられるから , xy 平面上において , 第1象限にある曲線 $xy = n$ 上の格子点の個数に等しい。したがって ,

$$\sum_{k=1}^n d(k) \text{ は領域 } x \geq 1, y \geq 1, xy \leq n \text{ 内の格子点の個数}$$

を表すから ,

$$\sum_{k=1}^n d(k) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

関数 $y = \frac{n}{x}$ は減少するから ,

$$\int_k^{k+1} \frac{n}{x} dx < \frac{n}{k} < \int_{k-1}^k \frac{n}{x} dx$$

$$\left[\frac{n}{k} \right] \leq \frac{n}{k} < \left[\frac{n}{k} \right] + 1 \text{ より } \frac{n}{k} - 1 < \left[\frac{n}{k} \right] \leq \frac{n}{k} \text{ であるから ,}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{n}{x} dx - 1 < \left[\frac{n}{k} \right] < \int_{k-1}^k \frac{n}{x} dx$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{n}{x} dx + \left[\frac{n}{n} \right] - n < \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] < \left[\frac{n}{1} \right] + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{n}{x} dx$$

$$\therefore \int_1^n \frac{n}{x} dx + 1 - n < \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] < n + \int_1^n \frac{n}{x} dx$$

ここで , $\int_1^n \frac{n}{x} dx = n \int_1^n \frac{1}{x} dx = n \left[\log x \right]_1^n = n \log n$ であるから

$$n \log n + 1 - n < \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] < n + n \log n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$1 + \frac{1}{n \log n} - \frac{1}{\log n} < \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n d(k) < \frac{1}{\log n} + 1$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log n} = 0$ であるから , ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \log n} \sum_{k=1}^n d(k) = 1 \quad (\text{答})$$