

数チャレ 第200回 (2017年9月)

自然数 n に対して, 1 以上 n 以下の整数 n のうち n と互いに素なものの個数を $\phi(n)$ で表すことにする。

- (1) $\phi(7)$, $\phi(27)$ をそれぞれ求めよ。
- (2) p, q を異なる素数とするととき, $\phi(pq)$ を求めよ。
- (3) (2) のとき, $pq - 1$ は $\phi(pq)$ で割り切れないことを示せ。

解答

- (1) 7 は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれとも互いに素であるから,

$$\phi(7) = 6 \quad (\text{答})$$

27 = 3^3 と互いに素な整数は 3 で割り切れない整数であるから,

$$\phi(27) = 3^3 - 3^2 = 18 \quad (\text{答})$$

- (2) p, q は素数であるから, $\phi(pq)$ は pq 以下の自然数から p または q で割り切れるものを除いた整数の個数を表し,

$$\begin{aligned}\phi(pq) &= pq - \frac{pq}{p} - \frac{pq}{q} + \frac{pq}{pq} \\ &= pq - q - p + 1 \\ &= (p-1)(q-1) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

- (3) p, q は異なる素数であり, p と q に関して対称であるから

$$p > q \geq 2$$

としてよい。

- (i) $p > q = 2$ のとき

$$pq - 1 = 2p - 1 = 2(p-1) + 1$$

$\phi(pq) = p - 1 > 1$ より, $pq - 1$ は $\phi(pq) = p - 1$ で割り切れない。

- (ii) $p > q \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned}pq - 1 - (p-1)(q-1) &= p + q - 2 \geq 5 + 3 - 2 > 0 \\ 2(p-1)(q-1) - (pq-1) &= pq - 2p - 2q + 3 \\ &= (p-2)(q-2) - 1 \\ &\geq (5-2) \times (3-2) - 1 = 2 > 0\end{aligned}$$

より

$$(p-1)(q-1) < pq - 1 < 2(p-1)(q-1)$$

であるから, $pq - 1$ は $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$ で割り切れない。

(証明おわり)