

数チャレ 第201回 (2017年10月)

自然数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

を満たすとする。

- (1) $a + b, a - b, c$ の少なくとも1つは5で割り切れることを示せ。
- (2) $a + b, a - b$ の少なくとも一方は4で割り切れることを示せ。
- (3) $a - b$ と c がともに5で割り切れないとき, $a + b$ が最小となるような (a, b, c) の組を求めよ。

解答

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- (1) $x = a + b, y = a - b$ とおくと, ①より

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2) = 4c^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

n を整数として,

$$(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2$$

$$(5n \pm 1)^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1$$

$$(5n \pm 2)^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4$$

であるから, 平方数を5で割った余りは0, 1, 4のいずれかであり, $x^2 + y^2$ を5で割った余りは

| x^2 | y^2 | $x^2 + y^2$ |
|-------|-------|-------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 4 | 4 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 0 |
| 4 | 0 | 4 |
| 4 | 1 | 0 |
| 4 | 4 | 3 |

$c^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ より

$$4c^2 \equiv 0, 4, 1 \pmod{5}$$

であるから, ②より

$$x^2 + y^2 \not\equiv 2, 3 \pmod{5}$$

であり, 上の表より, $x = a + b, y = a - b, c$ の少なくとも1つは5で割り切れる。

(証明おわり)

(2) ①より, a と b の偶奇は等しく, $a + b$ と $a - b$ はともに偶数である。よって,

$$\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \text{ はともに整数}$$

であり,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$a + b, a - b$ がともに 4 で割り切れないとすれば,

$$a + b = 2(2m + 1), \quad a - b = 2(2n + 1) \quad (m, n \text{ は整数})$$

と表され,

$$c^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となるが, $c^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ であるから ③ と矛盾する。

ゆえに, $a + b$ と $a - b$ の少なくとも一方は 4 で割り切れる。

(証明おわり)

(3) $a - b$ と c がともに 5 で割り切れないとき, (1) より

$a + b$ は 5 で割り切れる。

$$\frac{a+b}{2} > \frac{a-b}{2} \text{ に注意して,}$$

$$5^2 + 1^2, 5^2 + 2^2, 5^2 + 3^2, 5^2 + 4^2,$$

$$10^2 + 1^2, 10^2 + 2^2, \dots, 10^2 + 9^2 \text{ はいずれも平方数でない}$$

から, ③より

$$\frac{a+b}{2} \geq 15$$

$$\frac{a+b}{2} = 15 \text{ のとき, (2) より}$$

$$\frac{a-b}{2} \text{ は 5 で割れない偶数}$$

であり,

$$15^2 + 2^2 = 229, \quad 15^2 + 4^2 = 241, \quad 15^2 + 6^2 = 261,$$

$$15^2 + 8^2 = 289, \quad 15^2 + 12^2 = 369, \quad 15^2 + 14^2 = 421$$

の中で平方数となるのは

$$289 = 17^2$$

のみであるから, $a + b$ が最小となるのは

$$\frac{a+b}{2} = 15, \quad \frac{a-b}{2} = \pm 8 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

のときである。③, ④より, 求める自然数の組は

$$(a, b, c) = (23, 7, 17), (7, 23, 17) \quad (\text{答})$$