

数チャレ 第202回 (2017年11月)

a, b を正の整数とする。 a^2b が m 桁, ab^2 が n 桁であるという仮定だけで a と b の桁数が一意に定まるような m, n についての条件を求めよ。

解答

$a = 10^\alpha, b = 10^\beta$ とおくと, a^2b は m 桁, ab^2 は n 桁であるから

$$m - 1 \leq 2\alpha + \beta < m, \quad n - 1 \leq \alpha + 2\beta < n$$

$x = 2\alpha + \beta, y = \alpha + 2\beta$ とおくと

$$\alpha = \frac{2x - y}{3}, \quad \beta = \frac{2y - x}{3}$$

であるから,

$$\frac{2(m-1) - n}{3} < \alpha < \frac{2m - (n-1)}{3}$$

$$\frac{2(n-1) - m}{3} < \beta < \frac{2n - (m-1)}{3}$$

a の桁数 $[\alpha] + 1$ が一意に定まらないというのは,

$$\frac{2(m-1) - n}{3} < c < \frac{2m - (n-1)}{3} \quad \dots\dots ①$$

を満たす整数 c が存在して, $[\alpha] = c - 1$ か $[\alpha] = c$ が定まらないことを意味する。同様に, b の桁数 $[\beta] + 1$ が一意に定まらないというのは,

$$\frac{2(n-1) - m}{3} < d < \frac{2n - (m-1)}{3} \quad \dots\dots ②$$

を満たす整数 d が存在することを意味する。

①または②より, a または b の桁数が一意に定まらないのは,

$$3c - 1 < 2m - n < 3c + 2 \quad \dots\dots ③$$

を満たす整数 c が存在する, または

$$3d - 1 < 2n - m < 3d + 2 \quad \dots\dots ④$$

を満たす整数 d が存在するときである。

③より $2m - n \equiv 0$ または $1 \pmod{3}$, ④より $2n - m \equiv 0$ または $1 \pmod{3}$ であるから, $m \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$n \equiv 0 \text{ または } 2 \pmod{3} \text{ または } 2n \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{3}$$

$$\therefore n \equiv 0 \text{ または } 2 \pmod{3}$$

同様にして,

$$m \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } n \equiv 1 \text{ または } 2 \pmod{3}$$

$$m \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } n \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{3}$$

求める条件は，以上の否定であり，

$$m \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$m \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$m \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } n \equiv 2 \pmod{3}$$

であるから，

$$m + n \equiv 1 \pmod{3} \quad (\text{答})$$