

数チャレ 第203回 (2017年12月)

n を自然数とするとき, $2018^n + 30^n$ は 2 で何回割り切れるか。

解答

$$a_n = 2018^n + 30^n$$

が 2^{e_n} で割れ, 2^{e_n+1} で割れないような非負整数 e_n を求めればよい。

$$a_1 = 2018 + 30 = 2048 = 2^{11}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2018^2 + 30^2 \\ &= (2018 + 30)^2 - 2 \cdot 2018 \cdot 30 \\ &= 2^{22} - 2^3 \cdot 1009 \cdot 15 \\ &= 2^3 \times (2^{19} - 15135) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2018^3 + 30^3 \\ &= (2018 + 30)^3 - 3 \cdot 2018 \cdot 30 \cdot (2018 + 30) \\ &= 2^{33} - 2^{13} \cdot 3 \cdot 1009 \cdot 15 \\ &= 2^{13} \times (2^{20} - 45405) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 2018^4 + 30^4 \\ &= (2018 + 30)^4 - 2 \cdot 2018^2 \cdot 30^2 \\ &= 2^6 \times (2^{19} - 15135)^2 - 2^5 \cdot 1009^2 \cdot 15^2 \end{aligned}$$

を観察すると,

$$e_{2n-1} = 2n + 9, \quad e_{2n} = 2n + 1$$

であると予想できる。この予想が正しいことを数学的帰納法を用いて示す。

e_1, e_2 については既に予想は正しく,

$$e_{2k-1} = 2k + 9, \quad e_{2k} = 2k + 1$$

が成り立つとすれば,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= (2018 + 30)(2018^{2k} + 30^{2k}) - 2018 \cdot 30 \cdot (2018^{2k-1} + 30^{2k-1}) \\ &= 2^{11} a_{2k} - 2^2 \cdot 15135 a_{2k-1} \end{aligned}$$

$$e_{2k+1} = \min\{11 + (2k + 1), 2 + (2k + 9)\} = 2k + 11$$

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= (2018 + 30)(2018^{2k+1} + 30^{2k+1}) - 2018 \cdot 30 \cdot (2018^{2k} + 30^{2k}) \\ &= 2^{11} a_{2k+1} - 2^2 \cdot 15135 a_{2k} \end{aligned}$$

$$e_{2(k+1)} = \min\{11 + (2k + 11), 2 + (2k + 1)\} = 2k + 3$$

であるから,

$$e_{2(k+1)-1} = 2(k + 1) + 9, \quad e_{2(k+1)} = 2(k + 1) + 1$$

も成り立つ。

したがって, $a_n = 2018^n + 30^n$ が 2 で割り切れる回数 e_n は

$$n \text{ が奇数のとき } n + 10, \quad n \text{ が偶数のとき } n + 1 \quad (\text{答})$$

である。