

## 数チャレ 第204回 (2018年1月)

- (1) 2018 と 30 の最大公約数を求めよ。  
(2)  $2^{2018} - 1$  と  $2^{30} - 1$  の最大公約数を求めよ。

解答

- (1) ユークリッドの互除法を用いると,

$$2018 = 30 \times 67 + 8$$

$$30 = 8 \times 3 + 6$$

$$8 = 6 + 2$$

より

$$\gcd(2018, 30) = \gcd(30, 8) = \gcd(8, 6) = 2 \quad (\text{答})$$

- (2) (1)の計算を参考にして,

$$\begin{aligned} 2^{2018} - 1 &= 2^8 \times 2^{30 \times 67} - 1 \\ &= 2^8 \times (2^{30 \times 67} - 1) + 2^8 - 1 \\ &= (2^{30} - 1) \times 2^8 (2^{30 \times 66} + 2^{30 \times 65} + \dots + 2^{30} + 1) + 2^8 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{30} - 1 &= 2^6 \times 2^{8 \times 3} - 1 \\ &= 2^6 \times (2^{8 \times 3} - 1) + 2^6 - 1 \\ &= (2^8 - 1) \times 2^6 (2^{16} + 2^8 + 1) + 2^6 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^8 - 1 &= 2^2 \times 2^6 - 1 \\ &= 2^2 \times (2^6 - 1) + 2^2 - 1 \end{aligned}$$

と表されることより,

$$\begin{aligned} \gcd(2^{2018} - 1, 2^{30} - 1) &= \gcd(2^{30} - 1, 2^8 - 1) \\ &= \gcd(2^8 - 1, 2^6 - 1) \\ &= \gcd(2^6 - 1, 2^2 - 1) \\ &= \gcd(63, 3) \\ &= 3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$