

## 数チャレ 第205回 (2018年2月)

$p, q$  は素数で  $p < q$  とする。また  $m, n$  は正の整数とし、 $m \geq 3$  とする。1 から  $p^m q^n$  までの整数のうち、 $p$  または  $q$  の倍数の個数が 240 個であるとする。これらの条件を満たす組  $(p, q, m, n)$  をすべて求めよ。

出典：2008年 群馬大学 医学部

解答

1 以上  $p^m q^n$  以下の整数のうち、

$$p \text{ の倍数は } p^{m-1} q^n \text{ 個, } q \text{ の倍数は } p^m q^{n-1} \text{ 個}$$

である。

$p$  と  $q$  は互いに素であるから、 $p$  でも  $q$  でも割り切れるのは  $pq$  の倍数であり、

$$pq \text{ の倍数は } p^{m-1} q^{n-1} \text{ 個}$$

ある。

$p$  または  $q$  の倍数の個数

$$p^{m-1} q^n + p^m q^{n-1} - p^{m-1} q^{n-1} = p^{m-1} q^{n-1} (p + q - 1)$$

が 240 であるとき、

$$p^{m-1} q^{n-1} (p + q - 1) = 2^4 \times 3 \times 5 \quad \dots\dots (*)$$

$p, q$  は素数で、 $m \geq 3$  であるから

$$p = 2, \quad m = 3, 4, 5$$

に限られる。 $p < q$  にも注意して、 $m = 3, 4, 5$  について分けて考えると、

(i)  $m = 3, n = 1$  のとき、(\*)は

$$2^2 \times (2 + q - 1) = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$\therefore q = 2^2 \times 3 \times 5 - 1 = 59 \text{ (素数)}$$

(ii)  $m = 3, n \geq 2$  のとき、(\*)は

$$q^{n-1} (2 + q - 1) = 2^2 \times 3 \times 5$$

因数分解の一意性より

$$q = 3 \text{ または } 5 \text{ であることが必要}$$

であり、

$$q = 3 \text{ ならば, } 3^{n-1} = 3 \times 5 \text{ となって不適,}$$

$$q = 5 \text{ ならば, } 5^{n-1} = 2 \times 5 \text{ となって不適}$$

である。

(iii)  $m = 4, n = 1$  のとき、(\*)は

$$2^3 \times (2 + q - 1) = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$\therefore q = 2 \times 3 \times 5 - 1 = 29 \text{ (素数)}$$

(iv)  $m = 4, n \geq 2$  のとき、(\*)は

$$q^{n-1} \times (2 + q - 1) = 2 \times 3 \times 5$$

であり,

$$q = 3 \text{ ならば, } 3^{n-1} \times 2 = 3 \times 5 \text{ となって不適}$$

$$q = 5 \text{ ならば } 5^{n-1} = 5 \quad \therefore n = 2$$

(v)  $m = 5$  のとき, (\*)は

$$q^{n-1} \times (2 + q - 1) = 3 \times 5$$

であり,

$$n = 1 \text{ ならば, } q = 3 \times 5 - 1 = 14 \text{ は素数でないから不適,}$$

$$q = 3 \text{ ならば, } 3^{n-1} \times 2^2 = 3 \times 5 \text{ となって不適,}$$

$$q = 5 \text{ ならば, } 5^{n-1} \times 2 = 5 \text{ となって不適}$$

である。

以上より, 求める整数の組は

$$(p, q, m, n) = (2, 59, 3, 1), (2, 29, 4, 1), (2, 5, 4, 2) \quad (\text{答})$$