

数チャレ 第206回 (2018年3月)

整数 a, b は3の倍数ではないとし,

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(1)$ と $f(2)$ を3で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

出典：2018年 九州大学

解答

- (1) $a \equiv \pm 1 \pmod{3}$, $b \equiv \pm 1 \pmod{3}$ より

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

であるから,

$$f(1) = a^2 + 2b^2 + 3 \equiv 1 + 2 \times 1 + 0 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(2) = 4a^2 + 4b^2 + 17 \equiv 4 \times 1 + 4 \times 1 + 17 \equiv 1 \pmod{3}$$

よって,

$$f(1) \text{ を } 3 \text{ で割った余りは } 0, \quad f(2) \text{ を } 3 \text{ で割った余りは } 1 \quad (\text{答})$$

- (2) 整数 n が $f(n) = 2n^3 + a^2n^2 + 2b^2n + 1 = 0$ を満たすとすれば,

$$n(2n^2 + a^2n + 2b^2) = -1$$

より n は1の約数であり,

$$n = \pm 1$$

に限られる。

$$f(1) = a^2 + 2b^2 + 3 > 0$$

$$f(-1) = f(2) \equiv 1 \pmod{3}$$

より $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$ であるから, $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しない。

(証明おわり)

- (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数は

$$x = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な整数, } n > 0)$$

とおくことができ、解であることより

$$2\left(\frac{m}{n}\right)^3 + a^2\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2b^2 \cdot \frac{m}{n} + 1 = 0$$

$$2m^3 + a^2m^2n + 2b^2mn^2 + n^3 = 0$$

$$2m^3 = -n(a^2m^2 + 2b^2mn + n^2)$$

であるから

$$n \mid 2m^3$$

であるが， m と n は互いに素であるから

$$n \mid 2$$

(1) より $n \geq 2$ であるから

$$n = 2$$

に限られる。

$$m(2m^2 + a^2mn + 2b^2n^2) = -n^3$$

でもあるから，同様にして

$$m = \pm 1$$

が導かれ，

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{1}{2}$$

が必要である。

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2 + b^2 + \frac{5}{4} > 0$$

より，題意の条件は

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2 - b^2 + \frac{3}{4} = 0$$

に定まり，

$$a^2 - 4b^2 + 3 = 0$$

$$(a + 2b)(a - 2b) = -3$$

a, b が整数であることを考えて

$$(a + 2b, a - 2b) = (1, -3), (3, -1), (-1, 3), (-3, 1)$$

$$\therefore (a, b) = (-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1) \quad (\text{答})$$