

数チャレ 第207回 (2018年4月)

正の整数の組 (a, b, c) が次の式を満たすとする。

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- (1) a, b, c のうち少なくとも一つは偶数であることを示せ。
- (2) a, b, c のうちに素数ではないものがあることを示せ。

出典：2018年 東北大学 経済学部

解答

- (1) 奇数は $2n + 1$ (n は整数) と表され,

$$(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

a, b, c がすべて奇数であるとすれば,

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

であるから,

$$a^2 + b^2 \not\equiv c^2 \pmod{4}$$

したがって,

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

となる。

対偶をとると,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たすならば, a, b, c のうち少なくとも一つは偶数である。

(証明おわり)

- (2) a, b, c がすべて素数であるとすれば, (1) より, 少なくとも一つは 2 である。

- (i) $a = 2$ のとき

$$2^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

$c + b > c - b > 0$ より

$$c + b = 4, \quad c - b = 1$$

このとき

$$b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{5}{2}$$

となって, b, c が整数であることに反する。

- (ii) $b = 2$ のときも, $a = 2$ のときと同様に矛盾する。

- (iii) $c = 2$ のとき

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ より}$$

$$0 \leq a < 2, \quad 0 \leq b < 2$$

に絞られるが，

$$0^2 + 0^2 = 0 \neq 2^2, \quad 0^2 + 1^2 = 1 \neq 2^2, \quad 1^2 + 1^2 = 2 \neq 2^2$$

であるから矛盾する。

したがって， a, b, c のうち少なくとも一つは素数ではない。

(証明おわり)

(別解) a, b, c がすべて素数であるとする。

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ より}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

$c + b > c - b > 0$ であるから， a が素数であることより

$$c + b = a^2, \quad c - b = 1$$

$$\therefore b = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

$c - b = 1$ であるから， b も c も素数であることより

$$b = 2, \quad c = 3$$

このとき

$$a^2 = c^2 - b^2 = 5$$

となるが，左辺の素因数はすべて偶数乗，右辺は素数5(の1乗)であるから，
(a が正の整数であることより)素因数分解の一意性に矛盾する。

よって， a, b, c のうち少なくとも一つは素数ではない。

(証明おわり)