

数チャレ 第208回 (2018年5月)

$f(x) = x^2 + x + 105$ とおく。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 52, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) x が 7 で割ると 3 余るような整数のとき、 $f(x)$ を 7 で割った余りは 5 であることを表せ。
- (2) $x > 4$ のとき、 a_n は 7 の倍数であることを示せ。
- (3) $x > 4$ のとき、 a_n を 5 で割ったときの余りを求めよ。
- (4) $x > 4$ のとき、 a_{n+1} と a_n の最大公約数は 21 に等しいことを示せ。

出典：2018年 高知大学 理工学部, 医学部

解答

- (1) 105 が 7 で割り切れることに注意すると、 $x \equiv 3 \pmod{7}$ のとき

$$f(x) \equiv 3^2 + 3 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$$

であり、 $f(x)$ を 7 で割った余りは 5 である。

(証明おわり)

- (2) $a_1 = 52 = 7 \times 7 + 3 \equiv 3 \pmod{7}$

であるから、(1)より

$$a_2 = f(a_1) \equiv 5 \pmod{7}$$

である。以下、同様にして

$$a_3 \equiv f(5) \equiv 5^2 + 5 \equiv 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$a_4 \equiv f(2) \equiv 2^2 + 2 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$a_5 \equiv f(6) \equiv 6^2 + 6 \equiv 42 \equiv 0 \pmod{7}$$

$a_n \equiv 0 \pmod{7}$ ならば $a_{n+1} = f(a_n) \equiv 0^2 + 0 + 105 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから、

$n > 4$ のとき a_n は 7 の倍数

である。

(証明おわり)

- (3) $a_1 = 52 = 5 \times 10 + 2 \equiv 2 \pmod{5}$

$105 \equiv 0 \pmod{5}$ も考えて、

$$a_2 \equiv f(2) \equiv 2^2 + 2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$a_3 \equiv f(1) \equiv 1^2 + 1 \equiv 2 \pmod{5}$$

であり、以下同様に繰り返すから、 a_n を 5 で割った余りは

n が奇数のとき 2、 n が偶数のとき 1 (答)

- (4) $a_1 = 52 = 3 \times 17 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$

$$a_2 \equiv f(1) \equiv 1^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$a_3 \equiv f(2) \equiv 2^2 + 2 \equiv 6 \equiv 0 \pmod{3}$$

$a_n \equiv 0 \pmod{3}$ ならば $a_{n+1} = f(a_n) \equiv 0^2 + 0 + 105 \equiv 0 \pmod{3}$ であるから ,
 $n \geq 3$ のとき a_n は 3 の倍数

である。(2), (3)の結果とあわせると ,

$$n > 4 \text{ のとき } 21 \mid a_n, 5 \nmid a_n$$

$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 105$ より

$$\gcd(a_{n+1}, a_n) \mid 105$$

であるから , $105 = 3 \times 5 \times 7 = 21 \times 5$ を考えて

$$n > 4 \text{ のとき } \gcd(a_{n+1}, a_n) = 21$$

である。

(証明おわり)