

数チャレ 第209回 (2018年6月)

次の問いに答えよ。

- (1) n が 3 で割って 1 余る自然数であるとき, $1 + n + n^2$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対し, $n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (3) すべての自然数 n, k に対し,

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$$

は $k+2$ の倍数であることを示せ。

出典：2018年 島根大学 医学部

解答

- (1) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$1 + n + n^2 \equiv 1 + 1 + 1^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

(証明おわり)

- (2) n を 3 で割った余りは 0, 1, 2 のいずれかであり,

$$n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } n+1 \equiv 0 \pmod{3}$$

であるから, (1)とあわせて

$$n, n+1, 1+n+n^2 \text{ のいずれか 1 つは 3 の倍数}$$

であり, $n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3 の倍数である。

(証明おわり)

- (3) $n \equiv 1 \pmod{k+2}$ のとき

$$1 + n + n^2 + \cdots + n^{k+1} \equiv 0 \pmod{k+2}$$

であり, $n \equiv 2, 3, \dots, k+1, k+2 \pmod{k+2}$ のときは, それぞれ $n+k, n+k-1, \dots, n+1, n$ が $k+2$ で割り切れるから,

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1}) \text{ は } k+2 \text{ の倍数}$$

である。

(証明おわり)

別解

- (2) $1 + n + n^2 = (n+2) + (n^2-1)$

であることに注目すると, 連続する 3 つの整数の積は 3 の倍数であるから,

$$n(n+1)(1+n+n^2) = n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)^2$$

は 3 の倍数である。

(証明おわり)

- (3) $1 + n + n^2 + \cdots + n^{k+1}$

$$= (n+k+1) + n^2 + n^3 + \cdots + n^{k+1} - k$$

$$= (n+k+1) + (n^2-1) + (n^3-1) + \cdots + (n^{k+1}-1)$$

$$= (n+k+1) + (n-1)m \quad (m \text{ は整数})$$

であることに注意すると、連続する $k+2$ 個の整数の積は $k+2$ の倍数であるから、

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$$

$$= n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)$$

$$+ (n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)m$$

は $k+2$ の倍数である。

(証明おわり)

(注) (3)において

$$n^j - 1 = (n-1)m_j \quad (m_j \text{ は整数})$$

と表されるのは、

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

が成り立つことによる。