

数チャレ 第210回 (2018年7月)

(1) 2以上の自然数 n に対して,

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

が成り立つことを示せ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2) $\log 12$ の整数部分を求めよ。

解答

(1) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ より, 関数 $y = \frac{1}{x}$ は減少関数であるから, $k \geq 2$ のとき

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\left(\frac{1}{x}\right)'' = \frac{2}{x^3} > 0$ より, $y = \frac{1}{x}$ のグラフは下に凸であるから, $x = k - \frac{1}{2}$ における接線上に一辺をもつ台形の面積で下から評価することにより, $k \geq 2$ のとき

$$\frac{1}{k - \frac{1}{2}} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①および②を辺々加えて

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k - \frac{1}{2}} < \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$$

ここで,

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

であるから, 題意の不等式は示された。

(おわり)

(2) (1)の右の不等式は評価が甘いので, $y = \frac{1}{x}$ のグラフは下に凸であることに注意して, 4点 $(k-1, 0)$, $(k, 0)$, $(k, \frac{1}{k})$, $(k-1, \frac{1}{k-1})$ を頂点とする台形の面積で上から評価すると, $k \geq 3$ のとき

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx < \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2n}$$

(1)の結果とあわせて, $k \geq 3$ のとき

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k - \frac{1}{2}} < \log n < \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2n}$$

$n = 3, 4$ のときにこの不等式を用いて

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15} < \log 3 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{142}{105} < \log 4 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{35}{24}$$

$\log 12 = \log(3 \times 4) = \log 3 + \log 4$ であるから

$$\frac{16}{15} + \frac{142}{105} < \log 12 < \frac{7}{6} + \frac{35}{24}$$

ここで,

$$\frac{16}{15} + \frac{142}{105} = \frac{254}{105} = 2 + \frac{44}{105}$$

$$\frac{7}{6} + \frac{35}{24} = \frac{63}{24} = \frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}$$

であるから,

$$[\log 12] = 2 \quad (\text{答})$$

(注) $\log n < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$ を用いると,

$$\log 3 < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\log 4 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$

より

$$\log 12 = \log 3 + \log 4 < 3 + \frac{1}{3}$$

までしか示せないなので, 評価が甘い。