

数チャレ 第211回 (2018年8月)

座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。

- (1) 座標平面を格子点を頂点とする正方形で分割し、座標平面上の領域 D を、それら単位正方形との共通部分の和集合として

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_N$$

と表す。各単位正方形を、正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ と重なるように平行移動したとき、 D_k が移される領域を $E_k (k = 1, 2, \dots, N)$ とする。 D の面積が1より大きいとき、 $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ となる $i, j (1 \leq i < j \leq N)$ が存在することを示せ。

- (2) 座標平面上に面積が1以上である領域 D が与えられているとき、 D の周または内部にある2点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ で、 $x_1 - x_2$ と $y_1 - y_2$ がともに整数となるものが存在することを示せ。

- (3) 座標平面上の領域 A は、原点を中心として点対称な凸図形である。 A の面積が4であるとき、 A の周または内部に原点以外の格子点を含むことを示せ。ここで、図形 F が凸であるとは、 F 内の任意の2点 P, Q に対して線分 PQ 上の点がすべて F に含まれることをいう。

本問は数と幾何からの出題で、図チャレ第203回と共通です。

解答

- (1) 面積を $s(\)$ で表すことにする。

$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_N$ は単位正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ に含まれるから、任意の i, j に対して $E_i \cap E_j = \emptyset$ であるとすれば、

$$1 \geq \sum_{k=1}^N s(E_k) = \sum_{k=1}^N s(D_k) = s(D) > 1$$

となって矛盾するから、 $s(D) > 1$ ならば $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ となる i, j が存在する。

(証明おわり)

- (2) (1)より、 $s(D) > 1$ ならば、ある $i, j (1 \leq i < j \leq N)$ に対して $Q \in E_i \cap E_j$ となる点 Q が存在する。このとき、2点 $P_1 \in D_i, P_2 \in D_j$ で x 軸方向、 y 軸方向に整数だけ平行移動して点 Q に移るものが存在するから、 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ とすると、 $x_1 - x_2$ と $y_1 - y_2$ はともに整数である。

$s(D) = 1$ の場合でも、 $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ となる i, j があれば同様に成り立つから、

$$s(D) = 1, \text{ 任意の } i, j \text{ に対して } E_i \cap E_j = \emptyset$$

である場合に主張を示せば、証明は完結する。ここで、

$$\sum_{k=1}^N s(E_k) = \sum_{k=1}^N s(D_k) = s(D) = 1$$

であることに注意する。

D_1 の周上に1点Pをとり, Pを中心とする半径 $\frac{1}{n}$ の閉円板を $C\left(\frac{1}{n}\right)$ とし,

$$D_0 = D_1 \cup C\left(\frac{1}{n}\right)$$

とおく。さらに, D_1 が E_1 に移される時, D_0 が E_0 に移されるとする。

$s(E_0) = s(D_0) > s(D_1) = s(E_1)$ であるから

$$s(E_0) + \sum_{k=2}^N s(E_k) > s(E_1) + \sum_{k=2}^N s(E_k) = 1$$

であり, (1)より $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ となる $i, j \in \{0, 2, 3, \dots, N\}$ が存在するが,
 $1 \leq i < j \leq N$ において $E_i \cap E_j = \emptyset$ であるから,

$$E_0 \cap E_k \neq \emptyset, \quad 2 \leq k \leq N$$

となる k が存在する。 E_2, E_3, \dots, E_N が定図形である以上, n を動かしても k が変化することはなく, E_1 の閉包(E_1 と境界をあわせた図形)を $\overline{E_1}$ で表すことにすると, $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\overline{E_1} \cap E_k = \emptyset$$

したがって, $x_1 - x_2$ と $y_1 - y_2$ がともに整数であるような点

$$P_1(x_1, y_1) \in \overline{D_1} \text{ (} D_1 \text{の閉包)}, \quad P_2(x_2, y_2) \in D_k$$

が存在する。

(証明おわり)

(注) D が閉領域であれば, $s(D) = 1$ かつ, 任意の i, j に対して $E_i \cap E_j = \emptyset$ となる場合は, 結果的に起こらないことになる。

(3) 原点を中心として A を $\frac{1}{2}$ 倍した凸領域を A' とする。

A' の面積は1であるから, (2)より

$$x_1 - x_2 \text{ と } y_1 - y_2 \text{ がともに整数となる 2点 } P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$$

が A' の周または内部に存在する。 A' は凸図形であるから,

$$P_1 \text{ の原点に関する対称点 } P_0(-x_1, -y_1), \text{ および}$$

$$P_0P_2 \text{ の中点 } M\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$$

は A' の周または内部にある。

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OM} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

とおくと, 点 Q は A の周または内部にある原点 O と異なる格子点である。

(証明おわり)

(参考) (3)をミンコフスキー(Minkowski)の定理という。本問はミンコフスキーの定理を無理なく証明できるように誘導した問題である。