

## 数チャレ 第212回 (2018年9月)

$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2pq} = \frac{1}{n}$  を満たす素数  $p, q$  ( $p < q$ ) と自然数  $n$  を求めよ。

解答

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2pq} = \frac{1}{n} \text{ を変形すると}$$

$$\frac{pq + 2q + 2p + 1}{2pq} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore n(pq + 2p + 2q + 1) = 2pq$$

$pq < pq + 2p + 2q + 1$  および  $2p < 2q < pq + 2p + 2q + 1$  であることに注意して、素因数分解を考えると

$$pq + 2p + 2q + 1 = 2pq \text{ かつ } n = 1$$

$$pq - 2p - 2q = 1$$

$$\therefore (p-2)(q-2) = 5$$

$$0 \leq p-2 < q-2 \text{ より}$$

$$p-2 = 1, q-2 = 5$$

$$\therefore p = 3, q = 7, n = 1 \text{ (答)}$$