

## 数チャレ 第213回 (2018年10月)

$n$  を自然数とする。

(1)  $(n^2 + 1)(n^4 + 1)$  は立方数でないことを示せ。

(2)  $n \geq 2$  のとき,  $4(n^2 + 1)(n^4 + 1)$  は平方数でないことを示せ。

解答

$$(1) \quad (n^2 + 1)(n^4 + 1) = n^6 + n^4 + n^2 + 1 > n^6 = (n^2)^3 \\ < n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1 = (n^2 + 1)^3$$

$(n^2 + 1)(n^4 + 1)$  は, 隣り合う立方数  $(n^2)^3$ ,  $(n^2 + 1)^3$  の間にあるから,  $(n^2 + 1)(n^4 + 1)$  は立方数でない。 (証明おわり)

$$(2) \quad 4(n^2 + 1)(n^4 + 1) = 4n^6 + 4n^4 + 4n^2 + 4 \\ = n^2(4n^4 + 4n^2 + 1) + 3n^2 + 4 \\ = n^2(2n^2 + 1)^2 + 3n^2 + 4 \\ = (2n^3 + n)^2 + 3n^2 + 4 > (2n^3 + n)^2$$

$n \geq 2$  ( $n > 1$ ) のとき

$$(2n^3 + n + 1)^2 = (2n^3 + n)^2 + 2(2n^3 + n) + 1 \\ = (2n^3 + n)^2 + 4n^3 + 2n + 1 \\ = (2n^3 + n)^2 + 3n^3 + n^3 + 2n + 1 \\ > (2n^3 + n)^2 + 3n^2 + 1 + 2 + 1 = 4(n^2 + 1)(n^4 + 1)$$

$4(n^2 + 1)(n^4 + 1)$  は, 隣り合う平方数  $(2n^3 + n)^2$ ,  $(2n^3 + n + 1)^2$  の間にあるから,  $4(n^2 + 1)(n^4 + 1)$  は平方数でない。 (証明おわり)